

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ВЫСШИХ и СРЕДНИХ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

М. М. ГЛУХОВ и А. С. СОЛОДОВНИКОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ  
ПО КУРСУ  
ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1965

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ  
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный педагогический институт

---

М. М. ГЛУХОВ и А. С. СОЛОДОВНИКОВ

# ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ А. С. СОЛОДОВНИКОВА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

Москва 1965

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум составлен в соответствии с действующей программой курса высшей алгебры в педагогических институтах. Каждый параграф (за исключением первого, посвященного определителям второго и третьего порядков) начинается с достаточно подробного решения нескольких типичных задач данного раздела. Затем следуют упражнения для самостоятельной работы студента. Хотя в большинстве случаев решение сопровождается необходимыми пояснениями теоретического характера, эти пояснения не должны и не могут заменить учебника. Наиболее подходящими учебниками мы считаем: Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, М., Учпедгиз, 1958; А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, М., Физматгиз, 1962 (последний содержит много материала, выходящего за пределы программы). Авторы не сочли необходимым сопровождать каждый параграф задачника-практикума указаниями на соответствующие места в учебнике. Эти сведения сообщаются студентам лектором или даются в методических указаниях к курсу.

При составлении задачника был учтен опыт работы с подобными пособиями в заочном пединституте. По сравнению с вышедшим ранее задачником-практикумом по курсу высшей алгебры Г. М. Карпенко, Ю. И. Соркина и В. Б. Демьянова (М., Учпедгиз, 1960) существенно увеличен объем книги. Нам кажется, что задачник содержит достаточное число задач для самостоятельной работы студента, для выбора вариантов контрольных работ, для зачетов и т. п.

Параграфы 1—8 задачника написаны А. С. Солодовниковым, параграфы 9—20 — М. М. Глуховым.

При работе были использованы следующие пособия: И. В. Проскураков, Сборник задач по линейной алгебре (М., Физматгиз, 1962) и Д. К. Фаддеев и И. С. Соми́нский, Сборник задач по высшей алгебре (М., Гостехиздат, 1956).

Авторы

## § 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

### Упражнения

1. Вычислить определители:

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ;    b)  $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ ;

c)  $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ ;    d)  $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ ;

e)  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$ ;    f)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$ ;    g)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$ .

2. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a)  $\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 3x + 7y = 2; \end{cases}$     b)  $\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0, \\ 5x + 8y + 14 = 0; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} ax - by = 2a, \\ bx + ay = 2b. \end{cases}$

3. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна другой. То же самое для столбцов.

4. Доказать, что значение дроби  $\frac{ax+b}{cx+d}$  (где по крайней мере одно из чисел  $c, d$  отлично от нуля) тогда и только тогда не зависит от значения  $x$ , когда  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ .

5. Доказать, что квадратный трехчлен  $ax^2 + 2bx + c$  тогда и только тогда будет полным квадратом, когда

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

6. Решить уравнения:

a)  $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$ ;    b)  $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$ ,

считая неизвестные  $x$  и  $y$  действительными числами.

7. Вычислить площадь треугольника с вершинами:

a)  $A_1(1; 0)$ ,  $A_2(0; 1)$ ,  $A_3(-1; 2)$ ;

b)  $A_1(-1; -1)$ ,  $A_2(2; 0)$ ,  $A_3(-1; 4)$ .

Система координат — декартова прямоугольная.

Указание. Воспользоваться формулой из аналитической геометрии:

$$\pm S = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix},$$

где  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3)$  — вершины треугольника, а  $S$  — его площадь.

8. Вычислить определители:

a)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ;    b)  $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ ;

c)  $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ ;    d)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ ;    e)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ .

9. Доказать, что площадь  $S$  треугольника с вершинами  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3)$  можно определить по формуле

$$\pm S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Указание. Сравните этот определитель с определителем 2-го порядка из указания к задаче 7.

10. Вычислить площадь треугольника с вершинами:

a)  $A_1(0; 1)$ ,  $A_2(2; 3)$ ,  $A_3(-4; -1)$ ;

b)  $A_1(p; q)$ ,  $A_2(q; r)$ ,  $A_3(r; p)$ .

11. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a)  $\begin{cases} x + y + z = -2, \\ 3x + y + 4z = -13, \\ 8x + 9y + 5z = -5; \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ 2x - y + z = 9, \\ x - 4y + 2z = 11; \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{c) } bx + ay &= -2ab, \\ -2cy + bz &= 3bc, \\ cx + az &= 0, \end{aligned}$$

где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

12. Решить уравнения:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc.$$

## § 2. ПЕРЕСТАНОВКИ И ПОДСТАНОВКИ

Задача 1. Определить число инверсий в перестановках:

$$\text{a) } (5, 4, 1, 7, 6, 3, 2); \quad \text{b) } (n, n-1, \dots, 2, 1),$$

а также решить вопрос о четности этих перестановок.

Напомним, что *инверсией* называется любая пара чисел в данной перестановке, таких, что большее из них стоит левее меньшего. Если число инверсий — четное, то и сама перестановка называется *четной*. Если число инверсий — нечетное, то перестановка называется *нечетной*.

Решение задачи а). Первое число в данной перестановке есть 5. Определяем, в скольких инверсиях участвует это число. В данном случае 5 образует инверсии с 1, 2, 3, 4. Таким образом, число 5 участвует в четырех инверсиях. Вычеркиваем (мысленно) число 5 и обращаемся к следующему числу, 4. Оно образует инверсии с 1, 2, 3 — всего 3 инверсии. Вычеркиваем число 4 и обращаемся к следующему, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел, иначе говоря, число таких инверсий равно нулю. Зачеркиваем 1 и т. д. Суммарное число инверсий равно:

$$4 + 3 + 0 + 3 + 2 + 1 = 13.$$

Поскольку 13 — число нечетное, данная перестановка является нечетной.

Решение задачи б). На первом месте в данной перестановке стоит число  $n$ . Оно образует инверсию с лю-

бым из последующих чисел:  $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ . Следовательно, число  $n$  входит в  $n-1$  инверсию. Вычеркиваем  $n$  и обращаемся к следующему числу,  $(n-1)$ . Оно также образует инверсию с любым из последующих чисел; число таких инверсий равно  $n-2$  и т. д. Всего в данной перестановке имеется

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

инверсий. Это число будет четным, если произведение  $n(n-1)$  делится на 4. Но из двух сомножителей  $n, n-1$  один обязательно является нечетным; следовательно, для того чтобы произведение делилось на 4, нужно, чтобы другой сомножитель делился на 4. Итак, перестановка будет четной, если одно из чисел  $n$  или  $n-1$  делится на 4, и нечетной в противном случае.

Впрочем, учитывая специальный характер перестановки задачи б, можно указать более короткое решение. Очевидно, в данной перестановке любые два числа образуют инверсию. Следовательно, число всех инверсий равно числу сочетаний из  $n$  элементов по 2, т. е.  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**Задача 2.** Определить, четна или нечетна подстановка

$$\begin{pmatrix} 3, & 6, & 5, & 1, & 4, & 2 \\ 1, & 5, & 4, & 2, & 6, & 3 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Подстановка называется *четной*, если обе перестановки (верхняя и нижняя) имеют одинаковую четность. В данном случае число инверсий в верхней перестановке равно 10, в нижней — 6. Следовательно, подстановка четная.

### Упражнения

1. Определить число инверсий в перестановках:

а) (7, 6, 9, 1, 2, 3, 5, 4, 8);

б)  $(2n, 2n-1, \dots, n+2, n+1, n, n-1, \dots, 2, 1)$ .

2. Решить вопрос о четности подстановок:

а)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ;    б)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

с)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ $n$ -ГО ПОРЯДКА

Задача 1. С каким знаком входит в определитель 5-го порядка следующее произведение:

$$a_{51} a_{23} a_{34} a_{45} a_{12}?$$

Решение. Напомним правило знака. Если

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} -$$

какой-либо член определителя  $n$ -го порядка, то знак, с которым это произведение входит в определитель, зависит от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Точнее, если эта подстановка четная, произведение берется со знаком плюс, если подстановка нечетная — со знаком минус. В данном случае имеем четную подстановку

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение берется со знаком плюс.

Задача 2. Пользуясь только определением, доказать, что определитель 5-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Решение. Определитель 5-го порядка представляет собой сумму произведений вида

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5},$$

каждое из которых берется с определенным знаком (правило знака сейчас не играет роли). Здесь  $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$  — любая перестановка из чисел 1, 2, 3, 4, 5; поэтому всего в таком определителе должно быть  $5! = 120$  членов. Однако в данном случае многие члены определителя будут

равны нулю. Посмотрим, какие члены могут быть отличны от нуля. Для этого нужно, чтобы все пять сомножителей  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$  были отличны от нуля. Но  $a_{5j_5} \neq 0$  возможно только при  $j_5 = 1$  или  $j_5 = 2$  (элементы  $a_{53}, a_{54}, a_{55}$  по условию равны нулю). То же самое относится к  $a_{4j_4}$  и  $a_{3j_3}$ . Итак, рассматриваемое произведение может быть отлично от нуля лишь в том случае, когда любое из чисел  $j_3, j_4, j_5$  равняется 1 или 2. Но это невозможно, так как  $j_3, j_4, j_5$  — три различных числа. Следовательно, все члены данного определителя равны нулю, а вместе с ними равен нулю и сам определитель.

**Задача 3.** Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

**Решение.** Выясним, какие из членов

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

в данном определителе могут быть отличны от нуля. Очевидно, для этого нужно, чтобы  $j_1$  равнялось 1,  $j_2 = 1$  или 2,  $j_3 = 1, 2$  или 3 и т. д. Так как  $j_2 \neq j_1$ , то отсюда  $j_2 = 2$ . Так как  $j_3$  не равно ни  $j_1$ , ни  $j_2$ , то отсюда  $j_3 = 3$ , и т. д. В результате приходим к выводу, что единственным отличным от нуля членом в данном определителе может быть только

$$a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

Это произведение входит в определитель со знаком плюс. (Докажите!) Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

**Задача 4.** Пользуясь тождеством

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

и свойствами определителя, разложить правую часть на множители.

Решение. Мы знаем, что определитель не изменится, если к какой-либо строке прибавить любую линейную комбинацию других строк. Прибавим к первой строке данного определителя сумму второй и третьей строк. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix},$$

равный исходному. Общий множитель всех элементов строки можно вынести за знак определителя. В данном случае таким общим множителем является  $a+b+c$ . Вынося его, получим:

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)(bc+ca+ab-c^2-b^2-a^2).$$

Итак,

$$3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = (a+b+c)(ab+bc+ca - a^2 - b^2 - c^2),$$

что и дает требуемое разложение.

Задача 5. Не вычисляя определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

показать, что он равен нулю.

Решение. Вычитая из второй строки первую, получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Если из третьей строки также вычесть первую, то получится определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix},$$

в котором две строки пропорциональны. Такой определитель равен нулю.

Замечание. Решая задачу 5, мы перешли от исходного определителя к конечному с помощью двух преобразований. Каждое из них не меняло значения определителя.

При обоих преобразованиях одна и та же строка—а именно первая—оставалась без изменения, в то время как другая строка подвергалась преобразованию с помощью первой. Очевидно, оба преобразования можно было бы произвести одновременно. Так и поступают обычно в подобных случаях.

**Задача 6.** Над определителем выполняются следующие преобразования: ко второй строке прибавляется первая, к третьей—вторая и т. д., наконец, к предпоследней—последняя и к последней—первая. Изменится ли определитель, если эти преобразования производятся: а) последовательно? б) одновременно?

**Решение.** а) Если преобразования выполняются последовательно, т. е. каждое следующее преобразование производится над определителем, уже подвергшимся всем предыдущим преобразованиям, то после каждого шага получаем новый определитель, равный предыдущему. Следовательно, в результате всех преобразований величина определителя измениться не может. Пусть, например, исходный определитель есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда после первого преобразования получаем определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

после второго —

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ c_1 + b_1 + a_1 & c_2 + b_2 + a_2 & c_3 + b_3 + a_3 \end{vmatrix}$$

и после третьего —

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2a_1 + b_1 + c_1 & 2a_2 + b_2 + c_2 & 2a_3 + b_3 + c_3 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ c_1 + b_1 + a_1 & c_2 + b_2 + a_2 & c_3 + b_3 + a_3 \end{vmatrix}.$$

При этом  $\Delta = \Delta_1$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2$ ,  $\Delta_2 = \Delta_3$ , а следовательно, и  $\Delta = \Delta_3$ .

б) Предположим теперь, что указанные преобразования выполняются одновременно. Тогда из определителя  $\Delta$  получается новый определитель:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ c_1 + b_1 & c_2 + b_2 & c_3 + b_3 \end{vmatrix},$$

который всегда равен нулю. (Докажите!) Таким образом, при одновременном выполнении всех преобразований получаем определитель, который, вообще говоря, не равен исходному.

### Упражнения

1. Определить, с каким знаком входит в определитель 7-го порядка произведение

$$a_{33} a_{16} a_{72} a_{27} a_{55} a_{61} a_{44}.$$

2. Выбрать значения  $i$  и  $k$  так, чтобы произведение

$$a_{47} a_{63} a_{1i} a_{55} a_{7k} a_{24} a_{31}$$

было членом определителя (какого порядка?) и входило в него со знаком плюс.

3. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент  $a_{32}$  и входящие в определитель со знаком плюс.

4. С каким знаком входит в определитель  $n$ -го порядка произведение элементов главной диагонали? побочной диагонали?

Разъяснение. Главная диагональ идет от элемента  $a_{11}$  к элементу  $a_{nn}$ , побочная — от  $a_{1n}$  к  $a_{n1}$ .

5. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2, n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3, n-2} & a_{3, n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n, n-2} & a_{n, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от побочной диагонали равны нулю.

6. Дан определитель порядка  $2n$

$$\left| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \hline & & \boxed{\begin{array}{cc} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{array}} & \\ & & & \ddots \\ & & & \boxed{\begin{array}{cc} a_{2n-1, 2n-1} & a_{2n-1, 2n} \\ a_{2n, 2n-1} & a_{2n, 2n} \end{array}} \end{array} \right|,$$

в котором все элементы, расположенные вне указанных  $n$  «ящичков», равны нулю. Доказать, что он равен произведению

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{array} \right| \cdot \dots \left| \begin{array}{cc} a_{2n-1, 2n-1} & a_{2n-1, 2n} \\ a_{2n, 2n-1} & a_{2n, 2n} \end{array} \right|$$

определителей второго порядка, отвечающих всем «ящичкам».

7. Дан определитель  $n$ -го порядка

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{k+1, 1} & \dots & a_{k+1, k} & a_{k+1, k+1} & \dots & a_{k+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|.$$

Доказать, что он равен произведению двух определителей:

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{array} \right| \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{k+1, k+1} & \dots & a_{k+1, n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|.$$

8. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие  $x^4$  и  $x^3$ .

9. Записать определитель 4-го порядка, устроенный аналогично определителю задачи 5, и доказать, что он также равен нулю.

10. Исходя из свойств определителя, докажите, что определитель  $\Delta'$  из задачи 6 всегда равен нулю.

Указание. Воспользуйтесь тем свойством определителя, в котором говорится о разложении его на сумму двух определителей.

### 11. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равен  $\Delta$ . Чему равен определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} ?$$

12. Как изменится определитель, если его столбцы записать в обратном порядке?

13. Используя свойства определителей, проверьте, что следующие определители равны нулю:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ \sin \beta & \cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}.$$

14. Используя свойства определителя, вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}.$$

## § 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ С ЧИСЛОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Практическое вычисление определителей основано на формуле разложения определителя по элементам строки

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

и аналогичной формуле разложения по элементам столбца. Учитывая связь между алгебраическими дополнениями и минорами

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

можно записать:

$$\Delta = a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисление определителя  $n$ -го порядка  $\Delta$  сводится к вычислению ряда определителей  $(n-1)$ -го порядка — миноров  $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in}$ . Каждый из этих определителей, в свою очередь, можно свести к определителям  $(n-2)$ -го порядка, эти последние — к определителям порядка  $n-3$  и т. д. В конечном счете, вычисление  $\Delta$  сводится таким путем к вычислению ряда определителей 3-го порядка или, при желании, даже 2-го. Последние вычисляются непосредственно.

Особенно простой вид принимает разложение определителя по  $i$ -й строке в случае, когда все элементы этой строки, кроме одного  $a_{ij}$ , равны нулю. Тогда имеем:

$$\Delta = a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij},$$

благодаря чему вычисление  $\Delta$  сводится к вычислению одного-единственного определителя  $(n-1)$ -го порядка  $M_{ij}$ . Хотя в наперед заданном определителе  $\Delta$  может и не оказаться строки с нужным количеством нулей, тем не менее всегда можно, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной (по желанию) строке все элементы оказались равными нулю, кроме одного. Это преобразование основано на одном из свойств определителя, а именно: определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, или, выражаясь короче, если к одной строке прибавить другую, умноженную на любое число. Конкретно способ преобразования определителя к нужному виду объяснен в решении задачи 1.

**Задача 1.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Во второй строке определителя уже имеются два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы оказались нулями, кроме  $a_{24}$ , равного 1. Очевидно, для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему столбцу — четвертый, умноженный на  $-2$ . После таких преобразований получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Разлагаем его по элементам второй строки:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ -1 & \boxed{0} & 3 & 3 \\ 1 & \boxed{-1} & 3 & 1 \\ 2 & \boxed{-2} & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В этом определителе удобно выбрать второй столбец, поскольку в нем уже имеется один нуль и, кроме того, элементы этого столбца невелики. Преобразуем определитель так, чтобы все элементы второго столбца, кроме  $a_{12} = -1$ , стали равными нулю. Для этой цели из третьей строки вычитаем первую, а из четвертой — удвоенную первую. Получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный  $\Delta$ . Разлагая его по элементам второго столбца, находим:

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить непосредственно. Однако еще проще разложить

его по элементам первого столбца. В результате получим:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

**Замечание.** Подчеркнем еще раз следующее обстоятельство: для приведения определителя к такому виду, в котором все элементы выбранной строки, кроме одного, равны нулю, нужно оперировать со столбцами; если же нули «делаются» в столбце, то приходится оперировать со строками.

### Упражнения

1. Разложить следующие определители:

a)  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  по элементам второго столбца;

b)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$  по элементам третьей строки;

c)  $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$  по элементам второго столбца.

2. Вычислить определители:

a)  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ;    b)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ ;

c)  $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ;    d)  $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители:

a)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ;    b)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix}.$$

## § 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ $n$ -ГО ПОРЯДКА

В этом параграфе приводится ряд определителей, в расположении элементов которых имеется та или иная закономерность, в то время как порядок этих определителей конкретно не указан (и обозначен буквой  $n$ ). Никаких общих рецептов для вычисления определителей  $n$ -го порядка, естественно, дать нельзя (если, конечно, не рассматривать само определение как один из способов). В каждом отдельном случае нужно догадаться, как, не изменяя величины определителя, привести его к такому виду, что величину его можно будет определить сразу на основании тех или иных свойств определителей, либо, произведя разложение по элементам строки или столбца, свести нахождение данного определителя к нахождению одного или нескольких определителей более низкого порядка с ясно выраженной закономерностью в расположении элементов.

**Задача 1.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

**Решение.** Элементы этого определителя устроены по следующему закону. Все элементы главной диагонали, кроме первого, равны нулю. Далее, в любом  $i$ -м столбце ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) все элементы, расположенные выше нуля,

равны  $i$ , а все элементы, расположенные ниже нуля, равны  $-i$ . Исходя из этого наблюдения, легко сообразить, что если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы ниже главной диагонали будут равны нулю. Так и сделаем. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix},$$

равный исходному. На основании решения задачи 3 § 3 этот определитель равен

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

Способ, с помощью которого мы вычислили определитель задачи 1, называется *способом приведения к треугольному виду*. С помощью преобразований, не меняющих величины определителя, мы приводим последний к такому виду, в котором все элементы по одну сторону от главной (или побочной) диагонали равны нулю, или, как говорят, к «треугольному виду». А такой определитель, как следует из решения задачи 3 § 3, равен произведению диагональных элементов (с множителем  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$  в случае побочной диагонали).

**Задача 2.** Вычислить определитель  $n$ -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

**Решение.** В этом определителе все элементы главной диагонали равны  $a$ , а остальные элементы равны  $b$ . Если вычесть из всех строк первую, то получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix},$$

который еще не является треугольным, но легко приводится к треугольному виду: для этого достаточно к первому столбцу прибавить сумму всех остальных столбцов. В результате такого преобразования получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix},$$

откуда

$$\Delta = (a-b)^{n-1} [a + (n-1)b].$$

Задача 3. Вычислить определитель порядка  $n$ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. В данном определителе все элементы главной диагонали равны 3, все элементы вдоль «верхней» параллели к главной диагонали равны 2, вдоль «нижней» параллели равны 1. Метод, с помощью которого вычисляются подобные определители, называют *методом рекуррентных (возвратных) соотношений*. Он заключается в том, что данный определитель выражают через определители такого же типа, но более низкого порядка. Полученное равенство называется *рекуррентным соотношением*.

В данном случае рекуррентное соотношение получается следующим образом. Обозначим данный определитель  $n$ -го порядка через  $\Delta_n$ . Разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta_n = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Первый из определителей, стоящих в правой части, есть не что иное, как  $\Delta_{n-1}$ ; что же касается второго, то, разложив его по элементам первого столбца, найдем, что он равен  $\Delta_{n-2}$ . Итак, имеем рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}.$$

В принципе отсюда можно было бы получить выражение  $\Delta_n$  через  $\Delta_3$  и  $\Delta_2$ ; однако это выражение не так просто. Сделаем по-другому. Запишем полученное соотношение следующим образом:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$

Отсюда сразу видно, что числа  $a_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Следовательно,  $a_n = 2^{n-2} a_2$ ; или  $\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2^{n-2}(\Delta_2 - \Delta_1)$ . Но

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_1 = 3,$$

так что  $\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$ . Итак,

$$\Delta_n = 2^n + \Delta_{n-1}.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\Delta_n = 2^n + 2^{n-1} + \Delta_{n-2} = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \Delta_{n-3} = \dots$$

В итоге

$$\Delta_n = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 + \Delta_1 = (2^{n+1} - 4) + \Delta_1 = 2^{n+1} - 1.$$

Задача решена.

Если рекуррентное соотношение имеет более общий характер:

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2}, \quad (n > 2), \quad (1)$$

то подбираем числа  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы это соотношение можно было записать в виде

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}). \quad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), мы видим, что  $\alpha$  и  $\beta$  должны удовлетворять условиям:  $\alpha + \beta = p$ ,  $-\alpha\beta = q$ , т. е. должны являться корнями квадратного уравнения

$$x^2 - px - q = 0.$$

После того как найдены  $\alpha$  и  $\beta$ , поступаем как в задаче 3.

### Упражнения

1. Вычислить следующие определители приведением к треугольному виду:

$$а) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & b_2 & a_2 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель порядка  $n$ , элементы которого заданы условием:

$$a_{ij} = \min(i, j).$$

3. Вычислить методом рекуррентных соотношений следующие определители порядка  $n$ :

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (\text{определитель Вандермонда}).$$

Указание к упражнению 3, d. Вычтем из  $n$ -й строки  $(n-1)$ -ю, умноженную на  $a_n$ , из  $(n-1)$ -й строки —  $(n-2)$ -ю, умноженную на  $a_n$ , и т. д., наконец, из второй строки — первую, умноженную на  $a_n$ . После этого должно получиться рекуррентное соотношение вида

$$\Delta_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \Delta_{n-1}.$$

4. Вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Указание. В случае а) целесообразно представить элементы, стоящие вне главной диагонали, в виде  $a_i = 0 + a_i$ , а затем воспользоваться соответствующим свойством определителя сначала для 1-й строки, затем для 2-й и т. д. до  $n$ -й. Из многих определителей, которые получатся при этом, отличными от нуля будут только определители вида

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} \leftarrow i\text{-я строка}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), число которых равно  $n$ , а также еще один определитель, в котором все элементы главной диагонали равны  $x$ , а остальные элементы — нули; остальные определители будут содержать по две или более одинаковых строк ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) и в силу этого будут равны нулю. Отсюда величина исходного определителя будет

$$x^n + (a_1 + \dots + a_n)x^{n-1}.$$

В случае б) целесообразно записать элемент 0, стоящий в левом верхнем углу, как  $1 - 1$ , и представить данный определитель в виде суммы двух определителей относительно первой строки.

5. Написать определитель  $n$ -го порядка, элементы которого устроены по закону  $a_{ij} = i + j$ , и вычислить его.

## § 6. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Ряд упражнений на правило Крамера приведен в § 1 настоящего задачника-практикума (упражнения 2 и 11). Рекомендуем начать с просмотра этих упражнений. После этого можно приступить к следующим ниже задачам.

Задача 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8. \end{aligned}$$

Решение. Нам дана система с равным числом уравнений и неизвестных (4 и 4). Попробуем применить к ней правило Крамера. С этой целью прежде всего составим определитель из коэффициентов при неизвестных (определитель системы):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислив этот определитель (проще всего из третьего столбца вычесть утроенный четвертый), находим, что он равен 18 и, таким образом, отличен от нуля. Следовательно, к системе применимо правило Крамера. Согласно этому правилу единственное решение системы находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta},$$

где  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) есть определитель, полученный из  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов уравнений. Выписав все определители  $\Delta_i$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -5 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & -1 \\ 7 & -9 & 6 & 2 \\ 8 & -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 5 & 1 \\ 3 & -7 & -1 & -1 \\ 5 & -9 & 7 & 2 \\ 4 & -6 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 5 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 6 & 7 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

и проведя соответствующие вычисления, находим:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = -54, \quad \Delta_3 = -96, \quad \Delta_4 = 108.$$

Отсюда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -\frac{16}{3}, \quad x_4 = 6.$$

Задача 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}2x - y + 3z &= 9, \\3x - 5y + z &= -4, \\4x - 7y + z &= 5.\end{aligned}$$

Решение. Здесь мы имеем тот особый случай, когда определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

равен нулю. Поэтому буквально правило Крамера применить нельзя. Однако если мы подсчитаем определитель  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix},$$

то обнаружим, что он отличен от нуля ( $\Delta_1 = -168$ ). Отсюда сразу можно заключить, что система несовместна.

В самом деле, при выводе правила Крамера мы переходим от данных уравнений к уравнениям:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \Delta_1, \\ \Delta x_2 &= \Delta_2, \\ &\vdots \\ \Delta x_n &= \Delta_n,\end{aligned}$$

являющимся их следствиями. Отсюда видно, что если  $\Delta = 0$ , а из определителей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  хотя бы один не равен нулю, то указанная выше система уравнений несовместна (противоречива). Следовательно, исходная система также будет несовместна.

Задача 3. При каких значениях  $a$  система однородных уравнений

$$\begin{aligned}ax + y + z &= 0, \\ x + ay + z &= 0, \\ x + y + az &= 0\end{aligned}$$

имеет ненулевое решение?

Решение. Рассмотрим определитель системы

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Если он отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Это решение, разумеется, есть  $x = 0, y = 0,$

$z = 0$ . Следовательно, ненулевые решения системы могут быть только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$a^3 - 3a + 2 = 0.$$

Решим это уравнение (неизвестным является  $a$ ). Имеем:  
$$a^3 - 3a + 2 = (a^3 - a) - (2a - 2) = (a - 1)(a^2 + a - 2) =$$
$$= (a - 1)^2(a + 2),$$

откуда находим искомые значения  $a$ :

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = -2.$$

Посмотрим, будет ли система при этих значениях  $a$  иметь ненулевые решения. При  $a = 1$  система сводится к одному-единственному уравнению

$$x + y + z = 0,$$

которое имеет бесчисленное множество решений (в том числе, конечно, будут и ненулевые). При  $a = -2$  система принимает вид:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0, \\ x - 2y + z &= 0, \\ x + y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Здесь третье уравнение является следствием первых двух (если обе части 1-го и 2-го уравнений умножить на  $-1$ , а затем произвести сложение, то получится третье уравнение). Следовательно, его можно отбросить и решать систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0, \\ x - 2y + z &= 0, \end{aligned}$$

которая также имеет бесчисленное множество решений (берем в качестве  $z$  любое число и находим из уравнений значения  $x$  и  $y$ ).

Итак, ненулевые решения имеются при  $a = 1$  и  $a = -2$ .

**З а м е ч а н и е.** В общей теории систем линейных уравнений доказывается, что в случае, когда система линейных однородных уравнений содержит одинаковое число уравнений и неизвестных, причем определитель системы равен нулю, ненулевое решение всегда существует (смотрите, например, в учебнике Л. Я. Окунева начало § 17). Поэтому проверка значений  $a = 1$  и  $a = -2$  по существу была ненужной.

**Задача 4.** Какое условие необходимо, чтобы три прямые на плоскости

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

имели общую точку?

**Решение.** Предположим, что данные прямые имеют общую точку  $M_0(x_0, y_0)$ . Тогда выполняются равенства:

$$\left. \begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 &= 0, \\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рассмотрим следующую систему трех однородных уравнений с тремя неизвестными  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z &= 0. \end{aligned}$$

Равенства (1) показывают, что эта система имеет ненулевое решение:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = 1.$$

Отсюда вытекает, в силу правила Крамера, что определитель системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое условие.

### Упражнения

1. Решить системы уравнений:

a) 
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4, \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 1 &= 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 + 32 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 8 &= 0; \end{aligned}$$



6. Какое условие необходимо, чтобы три точки  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3)$  лежали на одной прямой?

7. Какое условие необходимо, чтобы четыре точки  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3)$ ,  $M_4(x_4; y_4)$  лежали: а) на одной окружности? б) на одной параболе вида  $y = ax^2 + bx + c$ ?

## § 7. РАНГ МАТРИЦЫ

Наиболее удобным способом вычисления ранга является способ элементарных преобразований. К элементарным преобразованиям над матрицей мы будем относить:

- перестановку двух строк (столбцов) матрицы;
- умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;
- вычеркивание строки (столбца), состоящей сплошь из нулей.

Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.

Пусть дана ненулевая матрица  $A$  (т. е. матрица, в которой имеется хотя бы один отличный от нуля элемент) с произвольным числом строк и столбцов. Тогда при помощи элементарных преобразований ее всегда можно привести к такому виду, в котором все «диагональные» элементы отличны от нуля, в то время как все элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Иначе говоря, с помощью элементарных преобразований можно привести матрицу  $A$  к виду

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix},$$

где

$$a'_{11} \neq 0, \quad a'_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad a'_{rr} \neq 0,$$

а все элементы, расположенные ниже этой «диагонали», равны нулю.

Ранг матрицы  $A'$  вычисляется легко: он равен  $r$ . Действительно, ранг матрицы есть максимальный порядок ее

миноров, отличных от нуля. В данном случае ранг не может быть больше  $r$ , так как в матрице  $A'$  имеется всего  $r$  строк. В то же время ранг  $A'$  не меньше  $r$ , так как в  $A'$  имеется минор  $r$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} \end{vmatrix} = a'_{11} a'_{22} \dots a'_{rr},$$

отличный от нуля. Следовательно, ранг  $A'$  в точности равен  $r$ . Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, можем записать: ранг  $A = \text{ранг } A'$ , т. е.

$$\text{ранг } A = r.$$

В принципе безразлично, производятся ли элементарные преобразования над строками или над столбцами матрицы. Однако мы будем пользоваться только преобразованиями строк, допуская исключение для столбцов в случае а), т. е. допуская перестановку столбцов. Для приведения любой матрицы к виду  $A'$  этих действий достаточно. Кроме того, это окажется удобным в дальнейшем, при решении систем линейных уравнений.

Конкретно способ приведения матрицы к нужному виду разъясняется в решении задачи 1. В дальнейшем запись  $A \sim B$  будет обозначать тот факт, что матрица  $B$  получена из  $A$  элементарными преобразованиями; в частности, отсюда следует, что матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковый ранг.

**Задача 1.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Постараемся сначала при помощи элементарных преобразований добиться того, чтобы первый элемент в первом столбце был отличен от нуля, в то время как остальные элементы этого столбца обратились в нуль. С этой целью оставим первую строку без изменения, а к каждой из остальных строк прибавим первую, умноженную на подходящее число: ко второй—первую, умноженную на  $-3$ , к третьей—первую, также умноженную на  $-3$ , наконец,

к четвертой—первую, умноженную на  $-5$ . Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на  $-2$ . Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Третья строка состоит сплошь из нулей, поэтому, вычеркнув ее, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

имеющую тот же ранг. Третий элемент в третьем столбце здесь равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Получится матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг  $A'$  равен трем, следовательно, и ранг исходной матрицы  $A$  также равен трем.

**Задача 2.** Чему равен ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix}$$

при различных значениях  $a$ ?

Решение. Применяем способ элементарных преобразований, как если бы  $a$  было конкретным числом:

$$\begin{aligned}
 A &\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8-a & a-2 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a & a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если хотя бы одно из чисел  $6+3a$  или  $a$  отлично от нуля, то ранг  $A$  равен 3; если же оба эти числа равны нулю, то ранг  $A$  равняется 2. Однако последний случай невозможен, так как при  $a=0$  имеем:  $6+3a=6 \neq 0$ . Поэтому ранг  $A$  равен 3 во всех случаях.

Задача 3. Чему равен ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & b & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

при различных значениях  $a$  и  $b$ ?

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}
 A &\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & a & b \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & a+6 & b-10 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & +9 \\ 0 & 0 & 1 & a-9 & b+19 \end{pmatrix} \sim
 \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 & b+19 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

ранг  $A$  равен 3, если  $a = 9$  и  $b = -19$ ,  
ранг  $A$  равен 4 — в остальных случаях.

### Упражнения

1. При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix};$$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$k) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$l) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$m) \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранги следующих матриц:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ a & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2a \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

при различных значениях  $a$ .

3. Составьте сами матрицу, ранг которой равен:

а) 1; б) 2; в) 3.

4. Как может измениться ранг матрицы, если приписать к ней: а) 1 строку; б) 2 строки? Тот же вопрос для столбцов.

5. Доказать, что элементарное преобразование типа а) (смотрите начало этого параграфа) можно осуществить, выполнив несколько раз преобразования типа б) и в).

6. Доказать, что любую матрицу ранга  $r$  можно элементарными преобразованиями привести к виду, где число строк равно  $r$ ,  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = 1$ , ...,  $a_{rr} = 1$ , а все остальные элементы равны нулю.

Помимо способа элементарных преобразований, существует еще один способ вычисления ранга—с помощью *окаймления миноров*. При этом способе мы переходим последовательно от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. А именно, если найден минор  $M$  порядка  $k$ , отличный от нуля, то, не интересуясь уже другими минорами  $k$ -го порядка, мы сразу же переходим к вычислению миноров порядка  $(k + 1)$ , однако не любых, а только таких, которые окаймляют (т. е. содержат в себе) минор  $M$ . Если среди окаймляющих миноров также обнаружен отличный от нуля минор  $M'$ , то мы сразу же переходим к вычислению миноров  $(k + 2)$ -го порядка, окаймляющих  $M'$ , и т. д. Если, наконец, после скольких-то шагов обнаружится такой минор  $r$ -го порядка, что *все* окаймляющие его миноры порядка  $r + 1$  равны нулю, то ранг матрицы равен  $r$ . Конечно, возможен и такой случай, когда для найденного минора порядка  $r$ , не равного нулю, уже не существует окаймляющих миноров в нашей матрице (так будет, если  $r$  равно числу строк или числу столбцов); в этом случае ранг матрицы также равен  $r$ .

Задача 4. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т. е. с элементов матрицы  $A$ . Среди них явно имеются отличные от нуля. Выберем, например, минор (элемент)  $M_1 = 1$ , распо-

ложенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и второго столбца, получаем минор  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ , равный нулю. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим  $M_2$ . Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы  $A$  равен 2.

**Задача 5.** Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Легко находим минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

отличный от нуля. Окаймляя его при помощи четвертого столбца и четвертой строки, получаем минор 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

равный нулю (проверьте!). Однако второй окаймляющий минор:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (проверьте!). Для этого минора в матрице  $A$  уже не существует окаймляющих миноров. Следовательно, ранг  $A$  равен 4.

Задача 6. Найти методом окаймления ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

в зависимости от значений  $a$ .

Решение. В качестве минора 1-го порядка, не равного нулю, возьмем элемент 1, расположенный в третьей строке и первом столбце. Окаймляющие его миноры 2-го порядка суть:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, \\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Единственное значение  $a$ , при котором все эти миноры равны нулю, есть  $a = 1$ ; тогда ранг  $A$  равен 1. Если же  $a \neq 1$ , то отличным от нуля будет хотя бы первый из указанных миноров. Окаймляющий его минор третьего порядка есть сам определитель матрицы  $A$ . Он равен

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Выясним, при каких значениях  $a$  это выражение равно нулю. Для этого решим уравнение

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Имеем:

$$x^3 - 3x + 2 = (x^3 - x) - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = \\ = (x - 1)(x^2 + x - 2),$$

откуда следует

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$$

Следовательно, если  $a \neq 1$  и  $a \neq -2$ , то ранг  $A$  равен 3.

Окончательно имеем:

при  $a = 1$  ранг  $A$  равен 1,

при  $a = -2$  ранг  $A$  равен 2,

при всех остальных значениях  $a$  ранг  $A$  равен 3.

## Упражнения

7. Найти методом окаймления миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 & -15 & 6 & -5 \\ 5 & 5 & -6 & 11 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

8. Найти методом окаймления ранги следующих матриц:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix},$$

а также матриц а), б), с) из упражнения 2 в зависимости от значений  $a$ .

9. Найти методом окаймления ранги следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{pmatrix};$$

$$\text{с) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

в зависимости от значений  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

## § 8. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подчеркнем, что речь идет о произвольных системах линейных уравнений, в которых число уравнений и число неизвестных могут быть какими угодно. Одним из наиболее удобных способов решения таких систем является способ последовательного исключения неизвестных, являющийся, по существу, слегка видоизмененным способом элементарных преобразований. Опишем этот способ в общем виде.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n &= b_s. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Будем производить над ней элементарные преобразования, понимая под ними любое из следующих действий:

- перестановку двух уравнений;
- умножение обеих частей любого уравнения на число  $c$ , отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число  $c$ ;
- вычеркивание уравнения вида  $0 = 0$ .

Если произвести над системой любое из преобразований а) — д), то получится система, равносильная исходной.





ны остаются на своих местах. Так, первое уравнение запишется в виде

$$a_{13}x_3 + a_{12}x_2 + a_{11}x_1 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n = b_1.$$

Если в процессе приведения матрицы  $\bar{A}$  к виду (2) встречались преобразования типа  $e'$ , то в системе (1'') слева будут стоять уже не  $x_1, \dots, x_r$ , а, вообще говоря, какие-то другие  $r$  неизвестных; какие именно — этот вопрос легко решить, если учесть все перестановки столбцов, которые производились в  $\bar{A}$ .

Само приведение  $\bar{A}$  к виду (2) осуществляется тем же способом, что и в § 7 при нахождении ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Единственное различие состоит в том, что теперь запрещается перестановка любого столбца матрицы с *последним* столбцом.

Из сказанного выше следует, что приведение матрицы  $\bar{A}$  к виду (2) возможно только в том случае, когда исходная система уравнений (1) совместна. Если же система (1) несовместна, то такое приведение невозможно. Это обстоятельство выражается в том, что в процессе преобразований матрицы  $\bar{A}$  в ней появляется строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такая строка соответствует уравнению вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b,$$

или  $0 = b$ , которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных (так как  $b \neq 0$ ). В этом случае система несовместна.

Задача 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_5 &= -2, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 &= 10. \end{aligned}$$

Решение. Данной системе соответствует матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 & -2 \\ -5 & 7 & 1 & 16 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

(для удобства столбец свободных членов отделяем вертикальной чертой). Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{A} &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 & -8 \\ 0 & -8 & -14 & 6 & -24 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -2 & 8 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -2 & 8 \end{array} \right)^{3-5} \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 & 8 \end{array} \right), \end{aligned}$$

где знак 3—5 над  $\sim$  указывает, что производится перестановка третьего и пятого столбцов. (Это соответствует перестановке членов с  $x_3$  и  $x_5$  в каждом уравнении системы.) Последней матрице соответствует (с учетом перестановки неизвестных) система уравнений:

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 5x_5 + 2x_4 + 3x_3 &= 2, \\ -4x_2 - 11x_5 - 3x_4 - 7x_3 &= -4, \\ -2x_5 + 12x_4 &= 8, \end{aligned}$$

которая равносильна исходной. Здесь  $x_4$  и  $x_3$  играют роль свободных неизвестных, через которые выражаются  $x_5$ ,  $x_2$ ,  $x_1$ . Из последнего уравнения находим

$$x_5 = \frac{1}{-2}(8 - 12x_4) = -4 + 6x_4.$$

Это выражение для  $x_5$  мы должны подставить во второе уравнение и выразить  $x_2$ . Произведя указанную подстановку  $x_5$ , получим:

$$-4x_2 - 11(-4 + 6x_4) - 3x_4 - 7x_3 = -4,$$

откуда

$$x_2 = 12 - \frac{69}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_3.$$

Подставляя найденные выражения для  $x_5$  и  $x_2$  в первое уравнение, получим:

$$x_1 = 14 - \frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_3.$$

Итак, общее решение системы имеет вид:

$$x_1 = 14 - \frac{79}{4}x_4 - \frac{9}{4}x_3,$$

$$x_2 = 12 - \frac{69}{4}x_4 - \frac{7}{4}x_3,$$

$$x_5 = -4 + 6x_4,$$

где  $x_3, x_4$  — свободные неизвестные, значения которых можно задавать произвольно. Полагая, например,  $x_3=0, x_4=0$ , получим частное решение:

$$x_1 = 14, x_2 = 12, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -4.$$

**Задача 2.** Решить систему уравнений:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1,$$

$$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1.$$

**Решение.** Выпишем матрицу, соответствующую данной системе:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} 2-5 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 10 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

Последней строке соответствует уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -6,$$

или  $0 = -6$ , которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных. Следовательно, данная система несовместна.

**Задача 3.** Решить систему уравнений:

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0,$$

$$3x_1 - x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0.$$

**Решение.** Данной системе соответствует матрица

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Удобнее всего начать с перестановки столбцов, например 1-го и 2-го. Итак,

$$\begin{aligned} \bar{A}^1 &\sim 2 \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\stackrel{2-3}{\sim} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Мы пришли к системе уравнений:

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 + 2x_1 - x_4 &= 0, \\ -x_3 &= 2x_4, \\ 3x_1 + 3x_4 &= 0, \\ -3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(учтены перестановки неизвестных:  $x_1 - x_2$  и  $x_2 - x_3$ ), из которой движением снизу вверх находим:

$$x_4 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Замечание. В последней задаче все свободные члены уравнений были нулями, поэтому столбец свободных членов в матрице  $\bar{A}$  можно было не выписывать. Далее, перестановку столбцов всегда можно совместить со следующим за ней преобразованием, что позволяет сократить записи. Так, матрицы, следующие после знаков  $1-2$  и  $2-3$ , можно было бы и не писать.

Задача 4. Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра  $a$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a. \end{aligned}$$

Решение. Данной системе соответствует матрица

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array} \right).$$

Имеем:

$$\bar{A} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right),$$

следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= a - 2, \\ 0 &= a - 5. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что система совместна только при  $a = 5$ .  
Общее решение в этом случае имеет вид:

$$x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4,$$

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4.$$

**Задача 5.** Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значений параметров  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1, \\ ax + (2b-1)y + 3z &= 1, \\ ax + by + (b+3)z &= 2b-1. \end{aligned}$$

Решение.

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{array} \right).$$

Таким образом, данная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1, \\ (b-1)y + z &= 0, \\ (b+1)z &= 2b-2. \end{aligned}$$

Если  $a \neq 0$ ,  $b-1 \neq 0$ ,  $b+1 \neq 0$ , то система имеет единственное решение:

$$z = \frac{2b-2}{b+1}, \quad y = -\frac{2}{b+1}, \quad x = \frac{5-b}{a(b+1)}.$$

Остается рассмотреть случаи, когда  $a = 0$ , или  $b = 1$ , или  $b = -1$ .

При  $b = -1$  последнее уравнение системы принимает вид  $0 = -4$ , откуда следует, что система несовместна.

При  $b = 1$  имеем:

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ ax + y &= 1, \end{aligned}$$

следовательно,  $x$  может быть каким угодно числом,  $y = 1 - ax$ ,  $z = 0$ .

Наконец, при  $a = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} by + 2z &= 1, \\ (b-1)y + z &= 0, \\ (b+1)z &= 2b-2. \end{aligned}$$

Поскольку случаи  $b = -1$  и  $b = 1$  уже рассмотрены, то можем считать  $b \neq 1$ ,  $b \neq -1$ . Тогда из третьего и второго уравнений

$$z = \frac{2b-2}{b+1}, \quad y = \frac{-2}{b+1},$$

а из первого:

$$-\frac{2b}{b+1} + \frac{4b-4}{b+1} = 1,$$

или  $b = 5$ . Итак, если  $a = 0$ ,  $b \neq 1$ ,  $b \neq -1$ , то система совместна только при  $b = 5$  и в этом случае  $z = \frac{8}{6}$ ,

$y = -\frac{2}{6}$ , а  $x$  — любое число.

Окончательно:

а) если  $a \neq 0$ ,  $b \neq 1$ ,  $b \neq -1$  одновременно, то

$$x = \frac{5-b}{a(b+1)}, \quad y = -\frac{2}{b+1}, \quad z = \frac{2(b-1)}{b+1};$$

б) если  $b = 1$ , то  $x$  — любое число,  $y = 1 - ax$ ,  $z = 0$ ;

в) если  $a = 0$ ,  $b = 5$ , то  $x$  — любое число,  $y = -\frac{1}{3}$ ,

$$z = \frac{4}{3}.$$

Во всех остальных случаях система несовместна (укажите точно эти случаи).

**Задача 6.** Найти уравнение окружности, проходящей через точки  $M_1(2; 1)$ ,  $M_2(1; 2)$ ,  $M_3(0; 1)$ .

**Решение.** Из аналитической геометрии известно, что любая окружность может быть задана уравнением вида:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (3)$$

Постараемся подобрать величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  так, чтобы окружность (3) проходила через точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Для этого нужно, чтобы координаты каждой из данных точек удовлетворяли уравнению (3):

$$\begin{aligned} 2^2 + 1^2 + a \cdot 2 + b \cdot 1 + c &= 0 & (\text{для } M_1), \\ 1^2 + 2^2 + a \cdot 1 + b \cdot 2 + c &= 0 & (\text{для } M_2), \\ 0^2 + 1^2 + a \cdot 0 + b \cdot 1 + c &= 0 & (\text{для } M_3). \end{aligned}$$

Таким образом, неизвестные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= -5, \\ a + 2b + c &= -5, \\ b + c &= -1. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим:  $a = -2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$ .  
Итак, уравнение искомой окружности:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

или

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

(центр окружности есть точка  $(1; 1)$ , радиус равен 1).

**Задача 7.** Используя критерий совместности, установить, совместна ли система уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 &= -5 \end{aligned}$$

(ранги матриц находить методом окаймления миноров). В случае совместности выяснить, какие уравнения независимы и какие являются их следствиями, а также — какие неизвестные будут свободными.

**Решение.** Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы, т. е. матрицы из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

равнялся рангу расширенной матрицы:

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -5 \end{array} \right).$$

Находим ранг матрицы  $A$ . Минор  $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$  отличен от нуля, а оба окаймляющих его минора третьего порядка равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг  $A$  равен двум. Обращаясь к матрице  $\bar{A}$ , мы по-прежнему исходим из минора  $M_2$ . Его окаймляют, помимо уже вычисленных, миноры третьего порядка, полученные добавлением последнего столбца. Их два:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix},$$

причем оба равны нулю. Следовательно, ранг  $\bar{A}$  тоже равен двум — система совместна. Независимыми будут уравнения

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \end{aligned}$$

отвечающие тем строкам матрицы  $\bar{A}$ , в которых расположен минор  $M_2$ . Далее, поскольку минор  $M_2$  образован коэффициентами при  $x_1$  и  $x_2$ , то свободным неизвестным будет  $x_3$ . Чтобы найти выражения  $x_1$  и  $x_2$  через  $x_3$ , нужно решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 + 3x_3, \\ 2x_1 + x_2 &= 1 + 2x_3, \end{aligned}$$

рассматривая  $x_3$  как данное число.

**Задача 8.** Дана система:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Какие значения возможны для рангов основной и расширенной матриц? Укажите геометрический смысл для случая, когда ранг основной матрицы равен 2, а ранг расширенной — 3.

**Решение.** Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица  $\bar{A}$  получается из  $A$  добавлением одного столбца, ее ранг или равен рангу  $A$ , или больше ранга  $A$  на 1. С другой стороны,

$$\text{ранг } A \leq 3, \quad \text{ранг } \bar{A} \leq 3,$$

поскольку ранг матрицы не может быть больше числа ее строк. Поэтому возможны только следующие случаи:

- 1) ранг  $A = 1$ , ранг  $\bar{A} = 1$ ;
- 2) ранг  $A = 1$ , ранг  $\bar{A} = 2$ ;
- 3) ранг  $A = 2$ , ранг  $\bar{A} = 2$ ;
- 4) ранг  $A = 2$ , ранг  $\bar{A} = 3$ ;
- 5) ранг  $A = 3$ , ранг  $\bar{A} = 3$ .

Система совместна в случаях 1, 3, 5.

С геометрической точки зрения линейное уравнение с тремя неизвестными определяет в пространстве (при заданной декартовой системе координат  $Oxyz$ ) плоскость. Обозначим плоскости, отвечающие данным уравнениям, через  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  (соответственно). Найти все решения данной системы означает геометрически найти все точки пересечения плоскостей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ . Если система несовместна, то таких точек не существует.

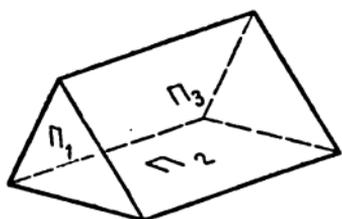


Рис. 1.

Из пяти перечисленных выше случаев нас интересует случай 4. Условие

$$\text{ранг } A = 2$$

означает, что один из миноров второго порядка матрицы  $A$  отличен от нуля, в то время как минор третьего порядка, т. е. определитель матрицы  $A$ , равен нулю. Пусть, например,  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ . Тогда плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  пересекаются (не параллельны). Что касается третьей плоскости  $\Pi_3$ , то она не может пересекать линию пересечения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , так как общих точек для всех трех плоскостей не существует, — система (3) в нашем случае несовместна. Итак, плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  пересекаются по прямой, а плоскость  $\Pi_3$  параллельна этой прямой (рис. 1).

Задача 9. Дана система

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

двух однородных уравнений с тремя неизвестными, причем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

равен 2. Доказать, что одним из решений системы будут числа:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

а всякое другое решение ему пропорционально.

Решение. Так как по условию ранг матрицы  $A$  равен 2, то один из указанных выше миноров второго порядка должен быть отличен от нуля. Пусть, для определенности, это будет  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ . Тогда  $x_3$  можно считать свободным неизвестным и, записав систему в виде

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 &= -a_3 x_3, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 &= -b_3 x_3, \end{aligned}$$

найти выражения для  $x_1$  и  $x_2$  по правилу Крамера. Имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -a_3 x_3 & a_2 \\ -b_3 x_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 x_3 \\ b_1 & -b_3 x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -x_3 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Беря в качестве  $x_3$  число  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , получим:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

т. е. указанное выше решение. Любое другое решение ему пропорционально.

### Упражнения

1. Решить методом исключения неизвестных следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, & \text{б) } x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, & 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5; & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6, \\ & & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\text{c) } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{array} \quad \text{d) } \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{array} \\
\text{e) } \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{array} \quad \text{f) } \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{array} \\
\text{g) } \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \end{array} \\
\text{h) } \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{array} \\
\text{i) } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2; \end{array} \\
\text{k) } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{array}
\end{array}$$

2. Исследовать систему и решить ее в зависимости от значений буквенных параметров:

$$\begin{array}{l}
\text{a) } \begin{array}{l} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1; \end{array} \quad \text{b) } \begin{array}{l} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2; \end{array} \\
\text{c) } \begin{array}{l} ax + y + z + u = 1, \\ x + ay + z + u = 1, \\ x + y + az + u = 1, \\ x + y + z + u = 1; \end{array} \quad \text{d) } \begin{array}{l} (a + 3)x + y + 2z = a, \\ ax + (a - 1)y + z = 2a, \\ 3(a + 1)x + ay + (a + 3)z = 3; \end{array} \\
\text{e) } \begin{array}{l} ax + by + z = 1, \\ x + aby + z = b, \\ x + by + az = 1; \end{array} \quad \text{f) } \begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{array}
\end{array}$$

3. Найти уравнение сферы в пространстве, проходящей через точки:  $M_1(1; 0; 0)$ ;  $M_2(1; 1; 0)$ ;  $M_3(1; 1; 1)$ ;  $M_4(0; 1; 1)$ .

4. Найти уравнение параболы третьей степени, проходящей через точки:  $M_1(1; 0)$ ;  $M_2(0; -1)$ ;  $M_3(-1; -2)$ ;  $M_4(2; 7)$ .

Разъяснение. Парабола 3-й степени определяется уравнением вида

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

5. Найти уравнение параболы 4-й степени, проходящей через точки:  $M_1(0; 5)$ ;  $M_2(2; -13)$ ;  $M_3(3; -10)$ ;  $M_4(1; -2)$ ;  $M_5(-1; 14)$ .

6. Найти уравнение кривой 2-го порядка, проходящей через точки:  $M_1(0; 0)$ ;  $M_2(1; 0)$ ;  $M_3(-1; 0)$ ;  $M_4(1; 1)$ ;  $M_5(-1; 1)$ .

7. Решить те же вопросы, что и в задаче 7, для систем:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ & 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ & 6x_1 - 11x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ & 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ & 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{aligned}$$

8. Пользуясь критерием совместности, установить, при каких значениях  $\lambda$  совместны системы:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ & 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ & 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ & x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{c)} \quad & \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & -x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{aligned}$$

9. Дана система

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_mx + b_my &= c_m \end{aligned}$$



находим:

$$2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (0; 0; -1; -10).$$

Задача 2. Даны векторы:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (2; -1; 3; 5), \\ \mathbf{a}_2 &= (4; -3; 1; 3), \\ \mathbf{a}_3 &= (3; -2; 3; 4), \\ \mathbf{a}_4 &= (4; -1; 15; 17).\end{aligned}$$

Будет ли  $\mathbf{a}_4$  линейной комбинацией  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ?

Решение. Нам требуется выяснить, можно ли вектор  $\mathbf{a}_4$  представить в виде

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3, \quad (1)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — некоторые числа. Но вектор (1) имеет следующие координаты:

$$\begin{aligned}2k_1 + 4k_2 + 3k_3, & -k_1 - 3k_2 - 2k_3, & 3k_1 + k_2 + 3k_3, \\ & 5k_1 + 3k_2 + 4k_3,\end{aligned}$$

и поэтому равенство  $\mathbf{a}_4 = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3$  будет иметь место лишь в том случае, если эти числа совпадают с координатами вектора  $\mathbf{a}_4$ :

$$\left. \begin{aligned}2k_1 + 4k_2 + 3k_3 &= 4, \\ -k_1 - 3k_2 - 2k_3 &= -1, \\ 3k_1 + k_2 + 3k_3 &= 15, \\ 5k_1 + 3k_2 + 4k_3 &= 17.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Остается выяснить, существуют ли числа  $k_1, k_2, k_3$ , удовлетворяющие этим условиям. Рассматривая соотношения (2) как систему уравнений с неизвестными  $k_1, k_2, k_3$  и решая эту систему, находим, что она имеет (и притом единственное) решение:  $k_1 = 2, k_2 = -3, k_3 = 4$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{a}_4$  является линейной комбинацией векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ :

$$\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3.$$

Задача 3. Дана система векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (1; 1; 4; 2), \\ \mathbf{a}_2 &= (1; -1; -2; 4), \\ \mathbf{a}_3 &= (0; 2; 6; -2), \\ \mathbf{a}_4 &= (-3; -1; 3; 4), \\ \mathbf{a}_5 &= (-1; 0; -4; -7).\end{aligned}$$

Установить: а) будет ли данная система линейно зависимой, а также — какие линейные зависимости имеются в этой системе;

б) можно ли представить вектор  $\mathbf{a}_5$  в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ .

Решение. Если между векторами данной системы существует соотношение вида

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  — какие-то числа, не равные одновременно нулю,  $\mathbf{0}$  — вектор  $(0; 0; 0; 0)$ , то система называется *линейно зависимой*, а само соотношение (3) — *линейной зависимостью* между векторами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ . Выражая соотношение (3) через координаты, получим 4 числовых равенства:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти все линейные зависимости между данными векторами, мы должны найти все решения

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

системы уравнений (4) при условии, что хотя бы одно из неизвестных отлично от нуля. Иначе говоря, нужно найти все ненулевые решения системы (4). Проводя необходимые вычисления, находим общее решение системы:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{6} x_5 - x_3, \\ x_2 &= \frac{5}{6} x_5 + x_3, \\ x_4 &= \frac{1}{3} x_5, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $x_3, x_5$  — свободные неизвестные. Отсюда видно, что между данными векторами существует бесчисленное множество линейных зависимостей.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, нужно выяснить, существует ли между векторами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$  линейная зависимость вида

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где  $x_5 \neq 0$ . Если такая зависимость существует, то

$$a_5 = \left(-\frac{x_1}{x_5}\right) a_1 + \left(-\frac{x_2}{x_5}\right) a_2 + \left(-\frac{x_4}{x_5}\right) a_4,$$

т. е.  $a_5$  есть линейная комбинация  $a_1, a_2, a_4$ . Но уравнение (6) получается из (3) при  $x_3 = 0$ . Таким образом, мы должны узнать, имеет ли система (4) решение, для которого  $x_3 = 0, x_5 \neq 0$ . Обращаясь к общему решению (5) системы (4) и полагая в нем  $x_3 = 0$ , находим:

$$x_1 = \frac{7}{6} x_5, \quad x_2 = \frac{5}{6} x_5, \quad x_4 = \frac{x_5}{3}.$$

Возьмем в качестве  $x_5$  любое отличное от нуля число, например  $-1$ . Тогда  $x_1 = -\frac{7}{6}, x_2 = -\frac{5}{6}, x_4 = -\frac{1}{3}$ , так что имеет место линейная зависимость вида

$$-\frac{7}{6} a_1 - \frac{5}{6} a_2 - \frac{1}{3} a_4 - a_5 = 0.$$

Отсюда

$$a_5 = -\frac{7}{6} a_1 - \frac{5}{6} a_2 - \frac{1}{3} a_4,$$

т. е.  $a_5$  — линейная комбинация  $a_1, a_2$  и  $a_4$ .

Замечание. Задачу 3б) можно решить также с помощью метода, изложенного в решении задачи 2.

Задача 4. Для системы векторов задачи 3 найти максимальную линейно независимую подсистему.

Решение. Возвращаясь к решению задачи 3, рассмотрим формулы (5), дающие общее решение уравнения (3). В левых частях этих формул стоят неизвестные  $x_1, x_2, x_4$ . Отсюда следует, что векторы  $a_1, a_2, a_4$  образуют максимальную линейно независимую подсистему. Докажем это.

Если бы векторы  $a_1, a_2, a_4$  были линейно зависимы, то мы имели бы равенство вида

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_4 a_4 = 0,$$

где хотя бы одно из чисел  $x_1, x_2, x_4$  отлично от нуля. Это означало бы, что уравнение (3) имеет ненулевое решение, для которого  $x_3 = x_5 = 0$ . Но это невозможно, так как при  $x_3 = x_5 = 0$  из формул (5) следует:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

Итак, подсистема, состоящая из векторов  $a_1, a_2, a_4$ , линейно независима. Докажем, что эта подсистема максимальна, т. е. что любой из оставшихся векторов  $a_3, a_5$  является линейной комбинацией  $a_1, a_2, a_4$ .

Полагая в равенствах (5)  $x_3 = -1, x_5 = 0$ , получим:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 0.$$

Следовательно,

$$a_1 - a_2 - a_3 = 0,$$

или

$$a_3 = a_1 - a_2,$$

т. е.  $a_3$  есть линейная комбинация  $a_1, a_2, a_4$ . Точно так же, полагая  $x_3 = 0, x_5 = -1$ , получим, что  $a_5$  есть линейная комбинация  $a_1, a_2, a_4$ .

Итак,  $a_1, a_2, a_4$  образуют искомую подсистему.

**Замечание.** Как видно из приведенного решения, любому выбору свободных неизвестных в системе (4) отвечает своя максимальная линейно независимая подсистема. Так, например, если в качестве свободных неизвестных мы взяли бы  $x_1, x_2$  (что возможно), то получили бы искомую подсистему, состоящую из векторов  $a_3, a_4, a_5$ .

**Задача 5.** Построить систему из трех линейно независимых четырехмерных векторов.

**Решение.** Достаточно взять любую матрицу  $A$ , состоящую из 3 строк и 4 столбцов, ранг которой равен 3. Для этой цели рассмотрим какой-либо определитель третьего порядка, не равный нулю, например

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

и присоединим к нему произвольно четвертый столбец.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

( $a, b, c$  — какие угодно числа). Так как ранг матрицы  $A$  равен 3, ее строки линейно независимы; следовательно, их можно принять за искомые векторы.

Задача 6. Найти фундаментальную систему решений для системы однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Каждое решение данной системы

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

представляет собой некоторый (четырёхмерный) вектор. По определению несколько решений образуют *фундаментальную систему*, если:

- 1) эти решения линейно независимы;
- 2) любое решение может быть представлено в виде их линейной комбинации.

Один из способов нахождения фундаментальной системы состоит в следующем. Находим сначала общее решение данной системы уравнений. Далее выбираем одно из свободных неизвестных и полагаем его равным 1, остальные свободные неизвестные берем равными нулю, после чего определяем значения всех остальных неизвестных. Таким путем мы получаем некоторое частное решение данной системы уравнений. Выбирая другое свободное неизвестное (и снова полагая его равным единице, а остальные свободные неизвестные — нулю), получим другое частное решение.

Построенные таким образом частные решения (число которых, очевидно, равно числу свободных неизвестных) образуют фундаментальную систему решений.

В данном случае общее решение (найденное при помощи метода, изложенного в § 8) имеет вид:

$$x_1 = 8x_3 - 7x_4, \quad x_2 = -6x_3 + 5x_4.$$

Фундаментальная система состоит из двух решений и имеет вид:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
8	-6	1	0
-7	5	0	1

Любое решение  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  данной системы уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации

$$c_1(8; -6; 1; 0) + c_2(-7; 5; 0; 1)$$

(где  $c_1 = x_3, c_2 = x_4$ ).

В случае произвольной системы однородных уравнений фундаментальная система решений состоит из  $n - r$  решений, где  $r$  — ранг матрицы  $A$ , составленной из коэффициентов при неизвестных, а  $n$  — число неизвестных. Если  $r = n$ , то фундаментальной системы не существует.

### Упражнения

1. Найти линейную комбинацию  $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$  векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (1; -1; 0; 4), \\ \mathbf{a}_2 &= (16; 4; 7; -2), \\ \mathbf{a}_3 &= (5; 2; 2; -3).\end{aligned}$$

2. Найти вектор  $\mathbf{x}$  из уравнения

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{x} = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (5; -8; -1; 2), \\ \mathbf{a}_2 &= (2; -1; 4; -3), \\ \mathbf{a}_3 &= (-3; 2; -5; 7).\end{aligned}$$

3. Найти вектор  $\mathbf{x}$  из уравнения

$$3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{x}) + 2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{x}) = 5(\mathbf{a}_3 + \mathbf{x}),$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (2; 5; 1; 3), \\ \mathbf{a}_2 &= (10; 1; 5; 10), \\ \mathbf{a}_3 &= (4; 1; -1; 1).\end{aligned}$$

4. Дана система векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (1; 2; 3; 2), \\ \mathbf{a}_2 &= (-2; 1; -2; -5), \\ \mathbf{a}_3 &= (1; -1; -1; 1), \\ \mathbf{a}_4 &= (-1; 2; 1; -2), \\ \mathbf{a}_5 &= (1; -3; -2; 2).\end{aligned}$$

а) Какие линейные зависимости имеют место между данными векторами?

б) Будет ли вектор  $\mathbf{a}_1$  линейной комбинацией  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ ? или линейной комбинацией  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ ? или линейной комбинацией  $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ ?

5. Дана система векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 & (2; 1; -3; 1), \\ \mathbf{a}_2 & (4; 2; -6; 2), \\ \mathbf{a}_3 & (6; 3; -9; 3), \\ \mathbf{a}_4 & (1; 1; 1; 1).\end{aligned}$$

а) Какие линейные зависимости имеют место между данными векторами?

б) Будет ли вектор  $\mathbf{a}_4$  линейной комбинацией  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_3$ ? вектор  $\mathbf{a}_1$  линейной комбинацией  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ?

6. Найти все максимальные линейно независимые подсистемы системы векторов:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \mathbf{a}_1 = (4; -1; 3; -2), & \text{б) } \mathbf{a}_1 = (1; 2; 3), \\ \mathbf{a}_2 = (8; -2; 6; -4), & \mathbf{a}_2 = (2; 3; 4), \\ \mathbf{a}_3 = (3; -1; 4; -2), & \mathbf{a}_3 = (3; 2; 3), \\ \mathbf{a}_4 = (6; -2; 8; -4); & \mathbf{a}_4 = (4; 3; 4), \\ & \mathbf{a}_5 = (1; 1; 1).\end{array}$$

7. Найти все значения  $\lambda$ , при которых вектор  $\mathbf{b}$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{a}_i$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \mathbf{a}_1 = (3; 4; 2), & \text{б) } \mathbf{a}_1 = (4; 4; 3), \\ \mathbf{a}_2 = (6; 8; 7), & \mathbf{a}_2 = (7; 2; 1), \\ \mathbf{b} = (9; 12; \lambda); & \mathbf{a}_3 = (4; 1; 6), \\ & \mathbf{b} = (5; 9; \lambda).\end{array}$$

8. Построить систему из четырех линейно независимых пятимерных векторов.

9. Даны два вектора:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 & = (1; 2; 3; 4), \\ \mathbf{a}_2 & = (0; 0; 0; 1).\end{aligned}$$

Подобрать еще два четырехмерных вектора  $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  так, чтобы система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  была линейно независимой.

10. Постройте систему из  $n$  линейно независимых  $n$ -мерных векторов. Может ли система  $n$ -мерных векторов быть линейно независимой, если число векторов больше  $n$ ?

11. Найти общее решение, а также фундаментальную систему решений для следующих систем уравнений:

$$\begin{aligned}\text{а) } 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 & = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\
 & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\
 & 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\
 & 3x_1 + 2x_2 + \quad \quad 4x_4 + 8x_5 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\
 & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\
 & x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\
 & 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0.
 \end{aligned}$$

## § 10. ДЕЙСТВИЯ НАД КВАДРАТНЫМИ МАТРИЦАМИ

Задача 1. Перемножить матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим оба произведения  $AB$  и  $BA$ . Согласно правилу умножения матриц элемент матрицы  $AB$ , стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце ( $a_{ij}$ ), равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ . Так, например,

$$a_{23} = (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + (-4) \cdot 9 = -51.$$

Подсчитав таким образом все элементы матрицы  $AB$ , находим:

$$AB = \begin{pmatrix} -17 & -34 & -51 \\ -17 & -34 & -51 \\ 17 & 34 & 51 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим на этом примере, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей.

Задача 2. Вычислить произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Объяснить результат геометрически.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Этот результат можно получить также из геометрических соображений. Матрица  $A$  отвечает линейное преобразование

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{aligned}$$

в котором нетрудно усмотреть формулы преобразования координат на плоскости при повороте осей на угол  $\alpha$ . Если произвести подряд два таких преобразования: сначала поворот на угол  $\alpha$ , а затем поворот на угол  $\beta$ , то результирующему преобразованию, т. е. повороту осей на угол  $\alpha + \beta$ , будет отвечать матрица

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

которая равняется произведению матриц, отвечающих каждому из преобразований в отдельности, т. е.  $AB$ .

Задача 3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. От нас требуется найти все матрицы  $A$  второго порядка такие, что

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Обозначим (неизвестные) элементы матрицы  $A$  через  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие задачи запишется в виде равенства

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 2x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 & 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 - x_3 & -x_2 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Но равенство двух матриц означает равенство их элементов, занимающих одинаковые места. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_1 + 2x_3, \\ 2x_1 - x_2 &= x_2 + 2x_4, \\ x_3 - x_4 &= -x_1 - x_3, \\ 2x_3 - x_4 &= -x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Фактически мы имеем здесь систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Проводя соответствующие вычисления, находим общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_2 &= -2x_3, \\ x_4 &= x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Таким образом, общий вид матрицы  $A$  будет:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

где  $x_1$  и  $x_3$  — любые числа.

Задача 4. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти для нее обратную матрицу  $A^{-1}$ .

Решение. Находим прежде всего определитель  $|A|$  матрицы  $A$ . Он равен  $-1$  и, таким образом, отличен от нуля. Следовательно, обратная матрица существует. Вычислим ее.

Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы. Обозначая, как обычно, через  $A_{ij}$  алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

(напомним, что  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , где  $M_{ij}$  — соответствующий минор). Теперь можно написать обратную матрицу. Она имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Задача 5.** Найти матрицу 2-го порядка  $X$  из уравнения  $AX = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Если мы умножим обе части уравнения слева на матрицу  $A^{-1}$ , то получим  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ , или  $X = A^{-1}B$ , так как  $A^{-1}A = E$  и  $EX = X$  ( $E$  — единичная матрица 2-го порядка).

Произведя необходимые вычисления, находим, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Найти все матрицы  $X$ , удовлетворяющие уравнению

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Так как определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  равен нулю, предыдущий метод неприменим, ибо обратной матрицы для  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  не существует. Поэтому задачу нужно решать иначе. Записываем матрицу  $X$  в виде  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ; тогда уравнение принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

или после выполнения действий в левой части

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 2, \\ 2x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Мы получили систему двух уравнений с четырьмя неизвестными. Решая ее, находим:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 - 2x_1, \\ x_4 &= 1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Таким образом, общий вид матрицы  $X$  есть

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 - 2x_1 & 1 - 2x_2 \end{pmatrix},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — любые числа.

Задача 7. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишите линейное преобразование, отвечающее этой матрице. Найдите обратное преобразование и с помощью него обратную матрицу  $A^{-1}$ .

Решение. Матрице  $A$  отвечает линейное преобразование

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= x_1 - x_2, \\ y_3 &= -x_1 + 2x_2 + x_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для которого  $A$  является матрицей из коэффициентов при неизвестных  $x_1, x_2, x_3$ . Найти обратное преобразование — значит найти выражения  $x_1, x_2, x_3$  через  $y_1, y_2, y_3$ . Для этого необходимо решить систему (1) относительно неизвестных  $x_1, x_2, x_3$ , что проще всего достигается при помощи элементарных преобразований над уравнениями системы (смотрите начало § 8).

Прежде чем приступить к преобразованиям, запишем систему (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 &= x_1 - x_2, \\ 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 &= -x_1 + 2x_2 + x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее переставляем первое и второе уравнения и исключаем  $x_1$  из всех уравнений, кроме первого:

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1 - x_2, \\ y_1 - 2y_2 &= 4x_2 + 3x_3, \\ y_2 + y_3 &= x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Переставляем второе и третье уравнения и исключаем из третьего  $x_2$ :

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1 - x_2, \\ y_2 + y_3 &= x_2 + x_3, \\ y_1 - 6y_2 - 4y_3 &= -x_3. \end{aligned}$$

Умножаем обе части третьего уравнения на  $-1$  и исключаем  $x_3$  из второго уравнения:

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1 - x_2, \\ y_1 - 5y_2 - 3y_3 &= x_2, \\ -y_1 + 6y_2 + 4y_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Наконец, исключаем  $x_2$  из первого уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 - 4y_2 - 3y_3 &= 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ y_1 - 5y_2 - 3y_3 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ -y_1 + 6y_2 + 4y_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обратное преобразование найдено. Ему отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

которая и будет обратной для  $A$ . Задача решена.

Коэффициенты при  $y_1, y_2, y_3$  в левых частях (2) образуют единичную матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

коэффициенты при  $x_1, x_2, x_3$  в правых частях образуют данную матрицу  $A$ . Наоборот, в (3) коэффициенты при  $y_1, y_2, y_3$  образуют матрицу  $A^{-1}$ , а коэффициенты при  $x_1, x_2, x_3$  — матрицу  $E$ . При этом переход от (2) к (3) совершается с помощью элементарных преобразований.

Задачу, подобную только что решенной, можно сформулировать для любой невырожденной матрицы  $A$ . Учитывая это, а также сказанное в предыдущем абзаце, при-

ходим к следующему способу нахождения обратной матрицы.

Приписываем к матрице  $A$  слева единичную матрицу  $E$ . Далее с помощью элементарных преобразований над строками всей составной матрицы приводим матрицу  $A$  к единичной матрице  $E$ . Тогда на месте первоначально приписанной матрицы  $E$  оказывается матрица  $A^{-1}$ .

Укажем, как при таком способе запишется решение задачи 7.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ & A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для большего удобства матрицу  $E$  приписывают к  $A$  справа. Тогда и  $A^{-1}$  получается справа.

Следующая задача 8 решается с помощью теоремы об умножении определителей, которая гласит: определитель произведения двух (или нескольких) матриц равен произведению определителей этих матриц. В символической записи:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Задача 8. Вычислить определитель матрицы  $n$ -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{pmatrix},$$

представив  $A$  в виде произведения двух матриц более простого устройства.

Решение. Элемент матрицы  $A$ , расположенный в  $i$ -й

строке и  $j$ -м столбце, имеет вид  $a_{ij} = 1 + x_i y_j = 1 \cdot 1 + x_i \cdot y_j$ . Следовательно, если ввести в рассмотрение матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то  $a_{ij}$  будет равняться сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $B$  на соответствующие элементы  $j$ -й строки матрицы  $C$ . Так как при перемножении матриц приходится умножать строки первой матрицы на столбцы второй, то отсюда видно, что матрица  $A$  равна произведению  $B$  и  $C^T$ , где  $C^T$  есть транспонированная матрица для  $C$ . Отсюда

$$|A| = |B| \cdot |C^T| = |B| \cdot |C|,$$

так как от транспонирования определитель не меняется. Но при  $n > 2$  оба определителя  $|B|$  и  $|C|$  равны, очевидно, нулю. Следовательно, и определитель  $|A|$  также равен нулю. Исключением является случай  $n = 2$ ; тогда  $|A| = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ .

### Упражнения

1. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

a)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ ;    d)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;

e)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

f)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Проверить на нескольких примерах, что произведение зависит от порядка сомножителей.

2. Вычислить выражения:

a)  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$ ;

c)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n$ , где  $a^2 + bc = 1$ ;    d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ .

3. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

4. Как изменится матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

если умножить ее слева на одну из матриц:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;    d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Постарайтесь, решив эту задачу, сформулировать аналогичные задачи для матриц  $n$ -го порядка.

5. Найти матрицу  $A^{-1}$ , если:

a)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , где  $ad - bc \neq 0$ ;

b)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;    c)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ;

d)  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

6. Найти  $A^{-1}$ , если:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ ;    b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Проверить, что если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } A^{-1} = \frac{1}{4}A.$$

Разъяснение. Под  $kA$ , где  $k$  — число, понимается матрица, полученная из  $A$  умножением всех элементов на  $k$ .

8. Найти  $A^{-1}$ , если  $A$  есть матрица  $n$ -го порядка:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Найти матрицу  $X$  из следующих уравнений:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$h) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$i) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$k) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$l) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

10. Найти все матрицы  $X$ , удовлетворяющие уравнению:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad b) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad d) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

11. Пользуясь методом, разъясненным в задаче 7, найти обратные матрицы для следующих:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Пользуясь методом, разъясненным в задаче 7, найти обратные матрицы для матриц упражнений: 6 а) — е); 7; 8 а), б).

13. Докажите, что если матрица  $A$  «треугольная», т. е. все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, и если все элементы главной диагонали отличны от нуля, то матрица  $A^{-1}$  существует и тоже является треугольной.

14. Проверьте утверждение теоремы об умножении определителей для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрите произведения:  $A \cdot B$ ,  $B \cdot A$ ,  $A \cdot A$ .

15. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

путем возвышения его в квадрат.

Указание. Примените теорему об умножении определителей к произведению  $A \cdot A^T$ , где  $A^T$  — транспонированная матрица.

16. Вычислить определитель  $n$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} \cos(x_1 - \beta_1) & \cos(x_1 - \beta_2) & \dots & \cos(x_1 - \beta_n) \\ \cos(x_2 - \beta_1) & \cos(x_2 - \beta_2) & \dots & \cos(x_2 - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(x_n - \beta_1) & \cos(x_n - \beta_2) & \dots & \cos(x_n - \beta_n) \end{vmatrix},$$

представив его в виде произведения двух определителей.

17. Докажите, что если  $A$  — невырожденная матрица (т. е.  $|A| \neq 0$ ), то  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ .

18. Пусть  $B$  — невырожденная матрица. Докажите, что для любой матрицы  $A$  имеет место равенство

$$|B^{-1}AB| = |A|.$$

## § 11. ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

### 1. Понятие алгебраической операции

Говорят, что на множестве  $M$  определена *алгебраическая операция*, если задано некоторое правило  $f$ , по которому любой паре элементов  $a, b$  из  $M$  (взятых в определенном порядке) сопоставляется вполне определенный элемент  $c$ , также принадлежащий  $M$ . Записывают:  $f(a, b) = c$  или  $afb = c$  (сравни:  $a + b = c$ ;  $a \cdot b = c$  и т. д.).

Задача 1. Является ли алгебраической операцией:

- умножение рациональных чисел?
- умножение иррациональных чисел?
- вычитание натуральных чисел?

Решение. а) Пусть  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  — два произвольных раци-

ональных числа. Тогда их произведение  $\frac{ac}{bd}$  вполне опреде-

лено и является рациональным числом. Следовательно, умножение рациональных чисел — алгебраическая операция.

б) Умножение иррациональных чисел не является алгебраической операцией, так как хотя произведение любых двух иррациональных чисел вполне определено, однако оно может оказаться не иррациональным (а рациональным) числом. Так, например,  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2$ .

в) Вычитание натуральных чисел не является алгебраической операцией, ибо не для любых двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  их разность  $a - b$  будет натуральным числом. (Приведите примеры!)

**Задача 2.** Показать, что умножение невырожденных матриц  $n$ -го порядка есть алгебраическая операция. (Матрица  $A$  называется невырожденной, если ее определитель  $|A|$  отличен от нуля.)

**Решение.** Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные невырожденные матрицы  $n$ -го порядка ( $|A| \neq 0$ ,  $|B| \neq 0$ ). Их произведение  $AB$  является вполне определенной матрицей  $n$ -го порядка:  $AB = C$ . Для решения нашей задачи остается лишь показать, что матрица  $C$  невырожденная. Известно, что определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц. Следовательно,  $|C| = |A| \cdot |B|$ . Отсюда и из того, что  $|A| \neq 0$  и  $|B| \neq 0$ , имеем:  $|C| \neq 0$ , т. е. матрица  $C$  — невырожденная. Таким образом, произведение любых двух невырожденных матриц  $n$ -го порядка есть невырожденная матрица  $n$ -го порядка. Следовательно, умножение невырожденных матриц  $n$ -го порядка является алгебраической операцией.

Заметим, что сложение невырожденных матриц  $n$ -го порядка при  $n > 1$  не является алгебраической операцией, так как сумма двух невырожденных матриц может оказаться вырожденной матрицей. (Приведите примеры!)

**Задача 3.** Является ли алгебраической операцией деление во множестве рациональных чисел  $R$ ?

**Решение.** Деление во множестве  $R$  не является алгебраической операцией, так как невозможно деление на нуль. Однако в любом другом случае частное от деления двух рациональных чисел будет вполне определенным рациональным числом. Поэтому можно сказать, что деление во множестве всех отличных от нуля рациональных чисел является алгебраической операцией. (Здесь важно также, что частное от деления двух отличных от нуля рациональных чисел отлично от нуля.)

**Задача 4.** Является ли умножение матриц алгебраической операцией на множестве треугольных матриц третьего порядка, а именно матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij}$  — любые действительные числа?

**Решение.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

— любые треугольные матрицы. Их произведение

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

— также треугольная матрица. Следовательно, умножение матриц на множестве треугольных матриц является алгебраической операцией.

**Задача 5.** Пусть  $M$  — множество радиусов-векторов находящихся в первой четверти координатной плоскости. Будет ли алгебраической операцией сложение векторов на множестве  $M$ ?

**Решение.** Из геометрических соображений (векторы на плоскости складываются по правилу параллелограмма видно, что сумма двух радиусов-векторов, находящихся в первой четверти, снова будет радиусом-вектором, расположенным в первой четверти. Следовательно, сложение векторов на множестве  $M$  есть алгебраическая операция.

Эту задачу можно решить и алгебраически. Всякий радиус-вектор на плоскости определяется положением (координатами) своего конца, т. е. алгебраически задается упорядоченной парой двух действительных чисел  $(a; b)$ , причем сложение векторов происходит по закону:  $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$ . Векторы  $(a; b)$  и  $(c; d)$  расположены в 1-й четверти тогда и только тогда, когда  $a \geq 0$

$b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ . Но тогда и  $a + c \geq 0, b + d \geq 0$ , т. е. вектор  $(a + c; b + d)$  расположен в первой четверти плоскости. Следовательно, сложение векторов на множестве  $M$  является алгебраической операцией.

## 2. Группы

Если на множестве  $G$  определена ассоциативная и обратимая алгебраическая операция  $f$ , то  $G$  называют *группой* относительно операции  $f$ .

Если операция  $f$  является умножением, то требования ассоциативности и обратимости можно записать следующим образом:

1. Ассоциативность:  $(ab)c = a(bc)$  для любых  $a, b, c$  из  $G$ .

2. Обратимость: уравнения  $ax = b$  и  $xa = b$  относительно неизвестного  $x$  однозначно разрешимы при любых  $a$  и  $b$  из  $G$ .

Требование 2 можно заменить совокупностью двух требований:

2'. В  $G$  существует элемент  $e$  такой, что  $ae = a$  для любого  $a$  из  $G$  ( $e$  называется *правым единичным элементом* группы  $G$ ).

2''. Для каждого элемента  $a$  из  $G$  существует элемент  $a^{-1}$  такой, что  $aa^{-1} = e$  ( $a^{-1}$  называется *правым обратным элементом* для  $a$ ). Можно доказать, что при одновременном выполнении условий 2' и 2''  $e$  является и *левым единичным элементом* (т. е.  $ea = a$  для всех  $a$ ),  $a^{-1}$  является и *левым обратным элементом* для  $a$  (т. е.  $a^{-1}a = e$ ). Поэтому  $e$  называют просто *единичным элементом* или *единицей* группы, а  $a^{-1}$  — *обратным элементом* для  $a$ . Легко доказывается также единственность  $e$  и  $a^{-1}$  ( $e$  — для всей группы,  $a^{-1}$  — для данного  $a$ ).

Требования 2' и 2'' иногда проверить легче, чем требование 2.

Если операция  $f$  является сложением  $(+)$ , то требования ассоциативности и обратимости запишутся следующим образом:

1. Ассоциативность:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

2. Обратимость: уравнения  $a + x = b$  и  $x + a = b$  разрешимы при любых  $a$  и  $b$  из  $G$ .

Так же, как и в случае умножения, здесь требование 2 можно заменить требованиями:

2'. В  $G$  существует элемент  $0$ , такой, что  $a + 0 = a$ .

2''. Для любого элемента  $a$  из  $G$  существует элемент  $-a$  (противоположный  $a$ ) такой, что  $a + (-a) = 0$ .

В том случае, когда в качестве групповой операции берется сложение, группа называется *аддитивной* (addition — сложение). Аддитивная запись в основном используется для *коммутативных* групп, т. е. когда результат операции над элементами  $a$  и  $b$  не зависит от порядка элементов (например,  $a + b = b + a$ ).

Из приведенных определений видно, что и в случае умножения и в случае сложения требования 1, 2, 2', 2'' выглядят совершенно одинаково и отличаются лишь по форме (значок  $+$  вместо  $\cdot$ ;  $0$  вместо  $e$ ;  $-a$  вместо  $a^{-1}$ ).

Богатый материал для построения групп дают множествово чисел, множество подстановок, множество матриц и т. д.

**Задача 6.** Образует ли группу относительно сложения (умножения) чисел множество целых чисел  $S$ ?

**Решение.** Как сложение, так и умножение целых чисел являются ассоциативными алгебраическими операциями. Проверим требования 2' и 2''. Во множестве  $S$  существует нулевой элемент  $0$  (число нуль):  $a + 0 = a$ , а также для каждого целого числа  $a$  существует противоположное ему число  $-a$ ;  $a + (-a) = 0$ . Короче:  $0 \in S$ ; если  $a \in S$ , то  $-a \in S$ . Следовательно, относительно сложения множество  $S$  является группой. Относительно умножения  $S$  не является группой, ибо не для каждого элемента из  $S$  существует обратный. А именно для числа  $a$  из  $S$  обратным будет число  $\frac{1}{a}$ , которое при  $a \neq \pm 1$  не является целым.

**Задача 7.** Образует ли группу относительно операции сложения (умножения) чисел множество рациональных чисел  $R$ ?

**Решение.**  $0 \in R$ ; если  $a \in R$ , то  $-a \in R$ . Следовательно, относительно сложения  $R$  является группой<sup>1</sup>. Далее,  $1 \in R$ ; если  $a \in R$  и  $a \neq 0$ , то  $a^{-1} = \frac{1}{a} \in R$ .

Таким образом, каждое отличное от нуля рациональное число имеет обратное, однако число  $0$  ( $0 \in R$ ) обратного не имеет. Значит, относительно умножения  $R$  не является группой.

---

<sup>1</sup> Требование ассоциативности мы здесь не проверяем, так как сложение и умножение любых чисел ассоциативны.

Заметим, что множество отличных от нуля рациональных чисел относительно умножения образует группу. Эта группа обычно называется *мультипликативной группой рациональных чисел*.

Задача 8. Образует ли группу относительно операции умножения чисел множество комплексных чисел  $M = \{1, -1, i, -i\}$  ( $i$  — мнимая единица)?

Решение. Легко проверить, что произведение любых двух чисел из  $M$  снова равно одному из чисел множества  $M$ . Это наглядно видно из таблицы умножения (таблицы Кэли).

Таблица 1

$\times$	1	-1	$i$	$-i$
1	1	-1	$i$	$-i$
-1	-1	1	$-i$	$i$
$i$	$i$	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	$i$	1	-1

(В таблице 1 произведение элементов  $a$  и  $b$  следует искать на пересечении строки с входным элементом  $a$  и столбца с входным элементом  $b$ .) Значит, умножение чисел на множестве  $M$  является алгебраической операцией. Кроме того,  $1 \in M$ . Осталось проверить, что для каждого элемента из  $M$  имеется обратный. Очевидно, что

$$1^{-1} = 1; (-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1; i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i;$$

$$(-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = i.$$

Ответ. Множество  $M$  относительно операции умножения является группой, причем коммутативной.

Замечание. Заметим, что все числа из  $M$  являются степенями одного числа, например  $i$ . В самом деле:  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$ ;  $i^4 = 1$ . Такие группы, у которых все элементы являются степенями одного элемента, называются

циклическими. (В случае аддитивной записи роль степени играет кратное: вместо  $a \cdot a = a^2$  имеем  $a + a = 2a$ .)

Задача 9. Доказать, что множество всех подстановок степени  $n$  образует группу относительно операции умножения подстановок.

Решение. Множество всех подстановок степени  $n$  обозначим через  $S_n$ . Напомним правило умножения подстановок. Пусть имеем две подстановки степени  $n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

где  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  и  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  — некоторые перестановки чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Если подстановка  $A$  переводит число  $i$  в число  $\alpha_i$ , а подстановка  $B$  число  $\alpha_i$  переводит в число  $\beta_{\alpha_i} = \gamma_i$ , то подстановка

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

называется *произведением подстановок*  $A$  и  $B$  и обозначается  $AB$  ( $AB = C$ ). Ясно, что произведением любых двух подстановок степени  $n$  будет вполне определенная подстановка степени  $n$ . Проверим групповые требования.

1. Ассоциативность:  $(AB)C = A(BC)$  для любых  $A, B, C$  из  $S_n$ .

Пусть  $\alpha$  — любое из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ ,  $A$  переводит  $\alpha$  в  $\beta$ ;  $B$  переводит  $\beta$  в  $\gamma$  и  $C$  переводит  $\gamma$  в  $\delta$ . Кратко это можно записать так:  $A : \alpha \rightarrow \beta$ ;  $B : \beta \rightarrow \gamma$ ;  $C : \gamma \rightarrow \delta$ .

Применяя правило умножения подстановок, получим:

$$\begin{array}{ll} AB : \alpha \rightarrow \gamma; & (AB)C : \alpha \rightarrow \delta; \\ BC : \beta \rightarrow \delta; & A(BC) : \alpha \rightarrow \delta. \end{array}$$

Отсюда следует, что  $(AB)C = A(BC)$ .

2'. Единичным элементом (единицей) во множестве  $S_n$  является подстановка

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для любой подстановки  $A$  из  $S_n$

$$AI = IA = A.$$

2''. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Обратной подстановкой для  $A$  служит подстановка

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

В самом деле, перемножая  $A$  и  $A^{-1}$ , получим:

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I.$$

**Вывод.** Множество  $S_n$  является группой. Она называется *симметрической группой степени  $n$*  и обозначается через  $S_n$ . Группа  $S_n$  содержит  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  элементов. Заметим, что эта группа при  $n > 2$  некоммутативна. (Проверьте!)

**Задача 10.** Составить таблицу умножения для симметрической группы  $S_3$  (группы подстановок степени 3). Является ли группа  $S_3$  циклической?

**Решение.** Группа  $S_3$  содержит 6 элементов. Выпишем их.

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем все произведения  $a_i a_j$  и запишем их в таблицу 2.

Таблица 2

$\times$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	$a_1$	$a_0$	$a_3$	$a_2$	$a_5$	$a_4$
$a_2$	$a_2$	$a_4$	$a_3$	$a_5$	$a_1$	$a_3$
$a_3$	$a_3$	$a_5$	$a_1$	$a_4$	$a_0$	$a_2$
$a_4$	$a_4$	$a_2$	$a_5$	$a_0$	$a_3$	$a_6$
$a_5$	$a_5$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_0$

Пользуясь этой таблицей, проверим, будет ли группа  $S_3$  циклической, т. е. являются ли все ее элементы степенями какого-либо одного из них. Для этого достаточно найти все различные степени каждого ее элемента. Предварительно заметим следующее. Пусть  $a_i$  — произвольный

элемент группы. Так как наша группа конечна, а степеней элемента  $a_i$  бесконечное множество:

$$a_i, a_i^2, a_i^3, \dots, \quad (1)$$

то в ряду (1) обязательно встретятся одинаковые элементы. Пусть  $a_i^{k_1}$  и  $a_i^{k_2}$  ( $k_1 < k_2$ ) — первая пара одинаковых элементов. Тогда имеем:  $a_i^{k_2} = a_i^{k_1}$ , или  $a_i^{k_2 - k_1} = a_0$  ( $a_0$  — единичный элемент группы  $S_3$ , это видно из таблицы). Если разность  $k_2 - k_1$  обозначить через  $k$ , то можно будет сказать, что элементы

$$a_i, a_i^2, \dots, a_i^{k-1}, a_i^k = a_0$$

ряда (1) все различны, а дальше повторяются те же самые элементы. В самом деле, поскольку  $a_0$  — единичный элемент, то

$$a_i^{k+1} = a_i^k a_i = a_0 a_i = a_i, \quad a_i^{k+2} = a_i^k a_i^2 = a_0 a_i^2 = a_i^2$$

и т. д. Таким образом, для отыскания всех различных степеней элемента  $a_i$  достаточно возводить его последовательно в степени 1, 2, ... до тех пор, пока не получим единичный элемент  $a_0$ .

Из таблицы имеем:

$$\begin{array}{lll} a_0^2 = a_0; & a_3^2 = a_4; & a_3^3 = a_0; \\ a_1^2 = a_0; & a_4^2 = a_3; & a_4^3 = a_0. \\ a_2^2 = a_0; & a_5^2 = a_0. & \end{array}$$

Отсюда видно, что ни для какого элемента  $a_i$  все его степени не исчерпывают группы, т. е. группа  $S_3$  не является циклической.

Задача 11. Пусть  $N$  есть множество из четырех элементов  $b_0, b_1, b_2, b_3$ . Образует ли это множество группу относительно операции умножения, заданной: а) таблицей 3; б) таблицей 4?

Таблица 3

$\times$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_0$	$b_3$
$b_2$	$b_2$	$b_0$	$b_1$	$b_1$
$b_3$	$b_3$	$b_1$	$b_2$	$b_1$

$\times$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_0$
$b_2$	$b_2$	$b_3$	$b_0$	$b_1$
$b_3$	$b_3$	$b_0$	$b_1$	$b_2$

**Решение.** Некоторые групповые свойства можно непосредственно «видеть» из таблицы умножения. Так, например, однозначная разрешимость уравнения  $ax=b$  при любых  $a$  и  $b$  означает, что в каждой строке таблицы каждый элемент встречается один раз. Аналогично, однозначная разрешимость уравнения  $xa=b$  при любых  $a$  и  $b$  означает, что в каждом столбце каждый элемент встречается один раз. (Докажите!) Коммутативность операции означает, что таблица является симметричной относительно ее главной диагонали, т. е. диагонали, идущей слева вниз направо. (Докажите!) Можно также доказать, что если в каждой строке и столбце таблицы каждый элемент встречается ровно один раз и порядок группы не превосходит 4, то выполняется ассоциативный закон.

Применим указанные факты к решению нашей задачи. Наблюдая таблицы 3 и 4, замечаем, что в третьей строке таблицы 3 элемент  $b_1$  встречается два раза. Следовательно, здесь уравнение  $b_2x=b_1$  имеет два решения. В самом деле, из таблицы видно, что этому уравнению удовлетворяют  $b_2$  и  $b_3$  ( $b_2b_2=b_1$ ;  $b_2b_3=b_1$ ). И наоборот, в этой же (3-й) строке элемент  $b_3$  не встречается ни разу. Это значит, что уравнение  $b_2x=b_3$  не имеет решения. Итак, в этом случае не выполняется обратимость умножения. Следовательно, множество  $N$  относительно операции, заданной таблицей 3, не является группой.

Далее замечаем, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы 4 каждый элемент множества  $N$  встречается ровно один раз. Значит, в этом случае операция ассоциативна и обратима, т. е. каждое из уравнений  $b_ix=b_j$ ,  $xb_i=b_j$  имеет единственное решение при любых  $b_i$  и  $b_j$  из  $N$ . Следовательно, множество  $N$  относительно операции умножения, заданной таблицей 4, является группой. Больше того, таблица 4 симметрична относительно главной диагонали. Значит, эта группа коммутативна.

В порядке упражнения найдите единичный элемент этой группы и для каждого элемента обратный элемент.

**Задача 12.** Является ли группой множество  $G$  всех невырожденных матриц  $n$ -го порядка относительно операции умножения матриц?

**Решение.** В задаче 2 было показано, что умножение невырожденных матриц является алгебраической операцией. Эта операция ассоциативна, ибо ассоциативный закон умножения выполняется для любых матриц. Далее, множество  $G$  содержит единичную матрицу  $E$ , так как единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной (ее определитель равен 1). Наконец, известно, что всякая невырожденная матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ , такую, что  $AA^{-1} = E$  и  $A^{-1}A = E$ . Из всего сказанного вытекает, что множество  $G$  относительно матричного умножения является группой (некоммутативной).

**Задача 13.** Показать, что множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

где  $a$  и  $b$  — любые, не равные одновременно нулю действительные числа, образует группу относительно матричного умножения.

**Решение.** Обозначим множество указанных матриц через  $M$ . Покажем сначала, что умножение матриц является на множестве  $M$  алгебраической операцией. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} —$$

любые две матрицы из  $M$ . Их произведение

$$AB = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

( $e = ac - bd$ ;  $f = ad + bc$ ) снова является матрицей из множества  $M$ . Значит, умножение матриц на множестве  $M$  является алгебраической операцией. Эта операция ассоциа-

тивна, ибо ассоциативно умножение любых матриц. Роль единицы играет единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она принадлежит множеству  $M$ , так как ее можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  — любая матрица из  $M$ . Ее определитель  $|A| = a^2 + b^2$  отличен от нуля, ибо по условию  $a$  и  $b$  не равны нулю одновременно. Следовательно, матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix},$$

которая снова принадлежит множеству  $M$ .

Из всего сказанного следует, что множество  $M$  относительно матричного умножения является группой. (Докажите, что эта группа коммутативна.)

**Задача 14.** Является ли группой множество  $M$  матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix},$$

где  $a$  и  $b$  — любые, не равные одновременно нулю действительные числа, относительно матричного умножения?

**Решение.** Найдем произведение двух матриц из  $M$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bd \\ bc + bd & 2bd \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что полученное произведение не всегда принадлежит  $M$ . (Приведите примеры!) Следовательно, множество  $M$  относительно умножения группой не является.

**Задача 15.** *Движением пространства* называется такое отображение пространства на себя, при котором сохраняется расстояние между любыми двумя точками, т. е. если точки  $A$  и  $B$  отображаются соответственно в точки  $A'$  и  $B'$ , то отрезки  $AB$  и  $A'B'$  равны. Из этого опре-

деления следует, что движение является взаимно однозначным отображением пространства на себя. (Проверьте!)

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — два движения пространства и  $A$  — произвольная точка. Если движение  $F_1$  отображает точку  $A$  в точку  $A_1$  (это записывают:  $AF_1 = A_1$ ), а  $F_2$  отображает точку  $A_1$  в точку  $A_2$  ( $A_1F_2 = A_2$ ), то движение  $F$ , которое отображает точку  $A$  в точку  $A_2$  ( $AF = A_2$ ), называют *произведением движений*  $F_1$  и  $F_2$  и обозначают:

$$F = F_1F_2.$$

Показать, что множество всех движений пространства относительно определенной операции умножения (их последовательного применения) образует группу.

Решение. Пусть  $F_1, F_2, F_3$  — три движения. Докажем, что

$$(F_1F_2)F_3 = F_1(F_2F_3).$$

Для этого достаточно показать, что, какую бы точку  $A$  пространства мы ни взяли, движения  $(F_1F_2)F_3$  и  $F_1(F_2F_3)$  переводят ее в одну и ту же точку, т. е.

$$A(F_1F_2)F_3 = AF_1(F_2F_3).$$

Пусть  $AF_1 = A_1, A_1F_2 = A_2, A_2F_3 = A_3$ . Тогда по определению произведения движений имеем:  $A(F_1F_2) = A_1F_2 = A_2$  и  $A(F_1F_2)F_3 = A_2F_3 = A_3$ . Аналогично,  $AF_1(F_2F_3) = A_1(F_2F_3) = A_2F_3 = A_3$ . Итак,  $A(F_1F_2)F_3 = AF_1(F_2F_3)$ .

Осталось показать, что существует единичное движение  $E$ , такое, что  $EF = F$ , и что для каждого движения  $F$  существует обратное движение  $F^{-1}$ , такое, что  $FF^{-1} = E$ . Очевидно, что в качестве движения  $E$  можно взять *тождественное отображение*, т. е. движение, отображающее каждую точку пространства в самое себя.

Пусть  $F$  — любое движение и  $A$  — любая точка пространства. Так как  $F$  — взаимно однозначное отображение пространства на себя, то для каждой точки  $A$  существует такая точка  $B$ , что  $BF = A$ . Тогда отображение, переводящее каждую точку  $A$  в соответствующую ей точку  $B$ , обозначим через  $F^{-1}$ . Очевидно, что

$$FF^{-1} = E.$$

Таким образом, множество движений пространства относительно произведения движений является группой.



рим множество всех преобразований множества  $D$  с помощью функций вида  $f(x) = ax + b$  (при всевозможных действительных  $a$  и  $b$ , кроме  $a = 0$ ) и определим произведение двух преобразований  $x \rightarrow a_1x_1 + b_1$ ,  $x \rightarrow a_2x_2 + b_2$  как результат их последовательного применения к  $D$ . Например, число  $\alpha$  первым преобразованием переводится в число  $a_1\alpha + b_1 = \beta$ ; число  $\beta$  вторым преобразованием переводится в число

$$a_2\beta + b_2 = a_2(a_1\alpha + b_1) + b_2 = (a_2a_1)\alpha + (a_2b_1 + b_2) = a\alpha + b,$$

где  $a = a_2a_1$ ;  $b = a_2b_1 + b_2$ . Таким образом, произведением преобразований  $x \rightarrow a_1x + b_1$  и  $x \rightarrow a_2x + b_2$  является преобразование  $x \rightarrow (a_2a_1)x + (a_2b_1 + b_2) = ax + b$ . Показать, что множество  $\Phi$  указанных преобразований множества  $D$  относительно определенной операции умножения является группой.

**Решение.** Ассоциативность умножения доказывается так же, как и в предыдущей задаче. Единичное преобразование определяется функцией  $1 \cdot x + 0 = x$ . Оно каждое действительное число оставляет на месте (тождественное преобразование). Найдем для преобразования  $x \rightarrow ax + b$  обратное. Пусть оно определяется функцией  $f_1(x) = a_1x + b_1$ . Найдем  $a_1$  и  $b_1$ . Так как произведение этих преобразований равно тождественному преобразованию, то имеем:  $a_1(ax + b) + b_1 = x$ , т. е.  $a_1ax + (a_1b + b_1) = x$ . Значит, должно быть:  $a_1a = 1$ ;  $a_1b + b_1 = 0$ . Отсюда  $a_1 = \frac{1}{a}$ ;  $b_1 = -a_1b = -\frac{b}{a}$ .

**Вывод:** множество  $\Phi$  является группой.

**Задача 17.** Образует ли множество векторов трехмерного пространства над полем действительных чисел группу относительно операции векторного умножения?

**Решение.** Векторное умножение векторов пространства является алгебраической операцией. Однако, как известно из аналитической геометрии, эта операция не ассоциативна. [Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны, то произведение  $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$ , тогда как  $(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$ .] Следовательно, множество векторов пространства относительно операции векторного умножения группой не является.

### 3. Изоморфизм групп.

Пусть  $G$  и  $G'$  — две группы относительно операции умножения. Группы  $G$  и  $G'$  называются *изоморфными* (обозначение:  $G \cong G'$ ), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое не нарушается при умножении, т. е. если элементам  $g_1$  и  $g_2$  группы  $G$  соответствуют элементы  $g'_1$  и  $g'_2$  группы  $G'$ , то элементу  $g_1g_2$  из  $G$  соответствует элемент  $g'_1g'_2$  из  $G'$ . (Аналогично можно определить изоморфизм групп относительно операции сложения и даже для групп с различными операциями — дело не в названии операции.)

Изоморфные группы по существу являются одинаковыми (относительно рассматриваемых операций) и могут отличаться лишь обозначениями элементов и их названиями. Поэтому в математике изоморфные группы (при изучении их групповых свойств) обычно не различают.

**Задача 18.** Показать, что группы, рассмотренные в задачах 8 и 11, изоморфны.

**Решение.** Выпишем таблицы 1 и 4 умножения обеих групп.

Таблица 1

$\times$	1	-1	$i$	$-i$
1	1	-1	$i$	$-i$
-1	-1	1	$-i$	$i$
$i$	$i$	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	$i$	1	-1

Таблица 4

$\times$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_0$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_0$
$b_2$	$b_2$	$b_3$	$b_0$	$b_1$
$b_3$	$b_3$	$b_0$	$b_1$	$b_2$

Обе группы содержат одно и то же число элементов. Следовательно, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Но это соответствие можно установить многими ( $4! = 24$ ) способами. Нам нужно установить такое соответствие, которое не нарушалось бы при умножении. Здесь нам помогут некоторые дополнительные соображения. Известно, что при изоморфизме групп единичный элемент одной группы соответствует единичному

элементу другой. Следовательно, числу 1 группы  $M$  должен соответствовать элемент  $b_0$  группы  $N$ :

$$1 \leftrightarrow b_0.$$

Далее, так как соответствие должно сохраняться при умножении и  $(-1)^2 = 1$ , а  $b_1^2 = b_2 \neq b_0$  и  $b_3^2 = b_2 \neq b_0$ , то числу  $-1$  не могут соответствовать элементы  $b_1$  и  $b_3$ . Значит, остается числу  $-1$  поставить в соответствие элемент  $b_2$  (действительно,  $b_2^2 = b_0$ ):

$$-1 \leftrightarrow b_2.$$

Оставшиеся две пары элементов сопоставим следующим образом:

$$i \leftrightarrow b_1; \quad -i \leftrightarrow b_3.$$

Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие:

$$1 \leftrightarrow b_0; \quad i \leftrightarrow b_1; \quad -1 \leftrightarrow b_2; \quad -i \leftrightarrow b_3.$$

Теперь покажем, что это соответствие сохраняется при умножении. Для этого, вообще говоря, нужно найти все произведения  $b_i b_j$  в группе  $N$  и произведения соответственных элементов в группе  $M$  и каждый раз выяснять, являются ли произведения соответственными элементами. Например,

$$b_1 \cdot b_2 = b_3; \quad i \cdot (-1) = -i.$$

Полученные элементы  $b_3$  и  $-i$  соответствуют друг другу. Для наглядности иногда это записывают следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} b_1 \cdot b_2 & = & b_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ i \cdot (-1) & = & -i \end{array}$$

Аналогично нужно просмотреть все произведения (их всего 16). Все это можно сделать несколько короче. Составим таблицу умножения для группы  $M$ , записав во входные строку и столбец элементы  $1, -1, i, -i$  в том порядке, в каком записаны в таблице группы  $N$  соответствующие им элементы  $b_i$ . Тогда таблица умножения группы  $M$  примет вид:

$\times$	1	$i$	$-1$	$-i$
1	1	$i$	$-1$	$-i$
$i$	$i$	$-1$	$-i$	1
$-1$	$-1$	$-i$	1	$i$
$-i$	$-i$	1	$i$	$-1$

Теперь осталось посмотреть: находятся ли в одинаковых клетках полученной таблицы и таблицы группы  $N$  соответственные элементы. Так, например, в обведенных жирными линиями клетках находятся соответственные элементы  $i$  и  $b_1$ . Аналогичную картину наблюдаем и для других соответствующих клеток. Следовательно, группы  $M$  и  $N$  изоморфны.

Если обозначить  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = i$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = -i$ , то группа  $N$  ничем не будет отличаться от группы  $M$ . В этом суть изоморфизма.

**Задача 19.** Показать, что все группы, содержащие три элемента (группы третьего порядка), изоморфны между собой. Привести конкретные примеры групп третьего порядка.

**Решение.** Пусть мы имеем множество  $G$  из трех элементов  $e$ ,  $a$ ,  $b$ . Очевидно, что число неизоморфных групп третьего порядка равно числу различных таблиц умножения, которые можно задать для элементов  $e$ ,  $a$ ,  $b$ . (Конечно, следует помнить, что каждая таблица должна быть такой, чтобы  $G$  относительно соответствующей операции было группой.) Заготовим входную строку и столбец таблицы

Таблица 6

$\times$	$e$	$a$	$b$
$e$			
$a$			
$b$			

и будем заполнять ее постепенно. В группе должен быть единичный элемент. Пусть таковым будет  $e$ . Тогда первая

строка и первый столбец должны будут совпадать со входными строкой и столбцом.

Таблица 7

×	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Осталось заполнить 4 клетки. Если учесть, что в каждой строке и каждом столбце каждый элемент должен встретиться лишь один раз (см. задачу 11), то оставшиеся 4 клетки заполнятся однозначно.

Таблица 8

×	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Таким образом, на трех элементах можно лишь одним способом определить операцию так, чтобы множество этих элементов относительно определенной операции было группой. Это и значит, что существует лишь одна группа из трех элементов, иначе говоря, все группы из трех элементов изоморфны.

Конкретными примерами групп третьего порядка могут служить: а) группа четных подстановок 3-й степени, т. е. множество подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

относительно умножения подстановок;

б) множество, состоящее из трех комплексных чисел  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\epsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , относительно умножения чисел.

Задача 20. Показать, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  с действительными элементами и с определите-

лем, равным единице, образует группу относительно операции умножения, изоморфную группе вращений плоскости вокруг ее начала координат на углы  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

Решение. Обозначим множество указанных в задаче матриц через  $M_1$ . Легко видеть, что множество  $M_1$  относительно операции умножения образует группу. (Проверьте!) Это так называемая ортогональная подгруппа группы  $M$ , рассмотренной в задаче 13. Покажем, что группа  $M_1$  изоморфна группе вращений плоскости вокруг начала координат. Из аналитической геометрии известно, что если координатную плоскость повернуть вокруг ее начала на угол  $\varphi$ , то координаты каждой точки  $(x; y)$  преобразуются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом, поворот плоскости на угол  $\varphi$  определяется линейным преобразованием (2). Множество всех вращений плоскости вокруг ее начала координат обозначим через  $G$ . Преобразованию (2) поставим в соответствие матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

где  $a = \cos \varphi$ ,  $b = \sin \varphi$ . Так как числа  $a$  и  $b$  действительные и  $|A_\varphi| = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$ , то матрица  $A_\varphi$  принадлежит множеству  $M_1$ . Таким образом, каждому элементу множества  $G$  (вращению) мы поставили в соответствие вполне определенную матрицу из  $M_1$ . При этом легко проверить, что разным вращениям (вращениям на разные углы) будут соответствовать разные матрицы из  $M_1$ . Обратно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

есть некоторая матрица из  $M_1$ . Представим матрицу  $A$  в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & r \sin \alpha \\ -r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы матриц, получим систему уравнений

$$a = r \cos \alpha; \quad b = r \sin \alpha$$

относительно неизвестных  $r$  и  $\alpha$ . Решая эту систему, найдем однозначно

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ и } 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Так как  $A \in M_1$ , то  $a^2 + b^2 = 1$ , т. е.  $r = 1$  и

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует линейное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{aligned}$$

т. е. поворот на угол  $\alpha$ . Итак, между элементами множеств  $G$  и  $M_1$  установлено взаимно однозначное соответствие. Осталось показать, что это соответствие сохраняется при операции умножения.

Пусть мы имеем два вращения: вращение на угол  $\varphi_1$  и вращение на угол  $\varphi_2$ . Им соответствуют матрицы из  $M_1$ ;

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Произведение вращений, как и движений вообще (см. задачу 15), определяется как результат их последовательного применения. Значит, произведением данных нам вращений будет вращение на угол  $\varphi_1 + \varphi_2$ <sup>1</sup>. Теперь найдем произведение матриц  $A_{\varphi_1}$  и  $A_{\varphi_2}$ :

$$\begin{aligned} A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos (\varphi_1 + \varphi_2) & \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\sin (\varphi_1 + \varphi_2) & \cos (\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = A_{\varphi_1 + \varphi_2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что произведению двух вращений соответствует произведение соответствующих им матриц, т. е. установленное нами взаимно однозначное соответствие между элементами множеств  $M_1$  и  $G$  сохраняется при умножении. Это и значит, что множества  $M_1$  и  $G$  изоморфны относительно операции умножения:  $M_1 \cong G$ .

<sup>1</sup> Здесь если угол  $\varphi_1 + \varphi_2$  окажется больше  $2\pi$ , то вычитанием угла, кратного  $2\pi$ , приведем его к углу  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

#### 4. Кольца и поля

Множество  $M$  с двумя алгебраическими операциями (сложением и умножением) называется *кольцом*, если выполняются следующие 5 требований ( $a, b, c$  — произвольные элементы из  $M$ ):

- 1°.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (ассоциативность сложения);
- 2°.  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения);
- 3°. уравнение  $a + x = b$  имеет однозначное решение при любых  $a$  и  $b$  из  $M$  (обратимость сложения);
- 4°.  $(ab)c = a(bc)$  (ассоциативность умножения);
- 5°.  $(a + b)c = ac + bc$ ,  $a(b + c) = ab + ac$  (правая и левая дистрибутивность умножения относительно сложения).

Если, кроме того, выполняется еще требование

- 6°.  $ab = ba$  (коммутативность умножения), то кольцо  $M$  называется *коммутативным*.

Если  $M$  — коммутативное кольцо, в котором выполняется требование

- 7°. уравнение  $ax = b$  однозначно разрешимо при любых  $a, b$  из  $M$ , кроме  $a = 0$ , то  $M$  называется *полем*.

Таким образом, если нам требуется исследовать, является ли множество  $M$  кольцом (или полем), то необходимо проверить, выполняются ли для алгебраических операций сложения и умножения на  $M$  требования 1°—5° (или 1°—7°).

Сразу же заметим, что требования 1°, 2°, 4°, 5°, 6° выполняются для всех чисел. Поэтому при исследовании числового множества достаточно проверить в нем наличие алгебраических операций сложения и умножения, а также выполнение требования 3° (3° и 7°). Иначе говоря, числовое множество  $M$  будет кольцом, если в нем (как говорят) выполнимы операции сложения, умножения и вычитания. Если, кроме этого, в  $M$  выполнимо деление на отличное от нуля число, то  $M$  будет полем.

**Задача 21.** Образует ли кольцо (поле) относительно числовых операций сложения и умножения множество:

- а)  $S$  (целых чисел);
- б)  $M$  (чисел вида  $a + b\sqrt{3}$ , где  $a$  и  $b$  — любые рациональные числа);
- в)  $L$  (чисел вида  $a + b\sqrt[3]{3}$ , где  $a$  и  $b$  — любые рациональные числа).

**Решение.** а) Во-первых, сложение и умножение целых чисел являются алгебраическими операциями. Кроме того, вычитание во множестве целых чисел всегда возможно и

однозначно, т. е. уравнению  $a + x = b$  при любых  $a$  и  $b$  удовлетворяет единственное целое число. Следовательно, множество  $S$  является кольцом (коммутативным). Полем множество  $S$  не является, ибо деление во множестве целых чисел не всегда возможно (т. е. частное от деления двух целых чисел не всегда равно целому числу).

б) Пусть  $\alpha, \beta \in M$ ;  $\alpha = a_1 + b_1 \sqrt{3}$ ,  $\beta = a_2 + b_2 \sqrt{3}$ . Тогда

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1 \sqrt{3}) + (a_2 + b_2 \sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt{3} = \gamma,$$

$$\alpha\beta = (a_1 + b_1 \sqrt{3})(a_2 + b_2 \sqrt{3}) = (a_1 a_2 + 3b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \sqrt{3} = \delta.$$

Так как числа  $a_1, a_2, b_1, b_2$  рациональные, то рациональными будут также числа  $a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_1 a_2 + 3b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2$ . Следовательно,  $\gamma \in M$  и  $\delta \in M$ , т. е. сложение и умножение чисел на множестве  $M$  являются алгебраическими операциями.

Проверим еще требование 3°, т. е. разрешимость уравнения

$$\alpha + x = \beta.$$

Решением (единственным) этого уравнения является число  $\beta - \alpha = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \sqrt{3}$ . Так как разность двух рациональных чисел является числом рациональным, то числа  $a_2 - a_1$  и  $b_2 - b_1$  рациональны и  $\beta - \alpha \in M$ . Следовательно, вычитание во множестве  $M$  всегда возможно и однозначно и множество  $M$  является коммутативным кольцом.

Выясним, будет ли множество  $M$  полем, т. е. разрешимо ли в нем уравнение

$$\alpha x = \beta \text{ при } \alpha \neq 0. \quad (3)$$

Решая уравнение (3), найдем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a_2 + b_2 \sqrt{3}}{a_1 + b_1 \sqrt{3}} = \frac{(a_2 + b_2 \sqrt{3})(a_1 - b_1 \sqrt{3})}{a_1^2 - 3b_1^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 - 3b_1 b_2}{a_1^2 - 3b_1^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 - 3b_1^2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Если  $a_1^2 - 3b_1^2 \neq 0$ , то полученное число имеет вид  $a + b \sqrt{3}$ , где  $a, b$  — рациональные числа, т. е. решение уравнения (3) принадлежит  $M$ .

Покажем, что  $a_1^2 - 3b_1^2 \neq 0$ . Во-первых, ясно, что если одно из чисел  $a_1, b_1$  равно нулю, а другое отлично от нуля, то

$$a_1^2 - 3b_1^2 \neq 0.$$

Поэтому осталось рассмотреть случай, когда  $a_1 \neq 0$  и  $b_1 \neq 0$ . Если в этом случае  $a_1^2 - 3b_1^2 = 0$ , то  $a_1^2 = 3b_1^2$  и  $3 = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2$ , т. е. число 3 является квадратом рационального числа, что невозможно. Итак,  $a_1^2 - 3b_1^2 \neq 0$ , если  $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{3} \neq 0$ . Следовательно, уравнение (3) разрешимо и  $M$  есть поле.

с) Возьмем два произвольных числа  $\alpha$  и  $\beta$  из  $L$  и проверим, принадлежат ли множеству  $L$  числа  $\alpha + \beta$  и  $\alpha\beta$ . Пусть  $\alpha = a_1 + b_1\sqrt[3]{3}$  и  $\beta = a_2 + b_2\sqrt[3]{3}$ . Тогда  $\alpha + \beta = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{3}$ . Это число принадлежит  $L$ , так как числа  $a_1 + a_2$  и  $b_1 + b_2$  рациональные. Далее,  $\alpha\beta = a_1a_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt[3]{3} + b_1b_2\sqrt[3]{9}$ . Отсюда видно, что если  $b_1b_2 \neq 0$ , то  $\alpha\beta$  не принадлежит  $L$ . Следовательно, умножение чисел во множестве  $L$  не является алгебраической операцией (множество  $L$  не замкнуто относительно умножения), а потому множество  $L$  не является кольцом и тем более полем.

Задача 22. Образует ли кольцо (поле) относительно операций сложения и умножения матриц множество  $M$  матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где  $a, b$  — любые действительные числа?

Решение. Пусть  $A, B$  — любые матрицы из  $M$  и

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Матрицы

$$A + B = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

принадлежат множеству  $M$ . Значит, сложение и умножение матриц из  $M$  являются алгебраическими операциями. Эти операции обладают свойствами 1°, 2°, 4°, 5° кольца, ибо эти свойства имеют место при сложении и умножении любых матриц. Легко видеть, что для матриц из  $M$  выпол-

няются также свойства  $3^\circ$  и  $6^\circ$ . (Проверьте!) Следовательно, множество матриц  $M$  образует коммутативное кольцо. Выясним, является ли множество  $M$  полем, т. е. разрешимо ли в  $M$  уравнение

$$AX = B,$$

где  $B$  — любая, а  $A$  — ненулевая матрица из  $M$ . Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была невырожденной. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Так как  $A \neq 0$ , то хотя бы одно из чисел  $a, b$  отлично от нуля. Определитель матрицы  $A$  равен  $ab$ . Отсюда видно, что определитель матрицы  $A$  может равняться нулю и в том случае, когда одно из чисел  $a, b$  отлично от нуля, т. е. матрица  $A$  может быть ненулевой и в то же время вырожденной. Такими являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где числа  $a$  и  $b$  отличны от нуля. В том случае, когда матрица  $A$  имеет такой вид, уравнение  $AX = B$  не разрешимо. Следовательно, множество  $M$  полем не является.

**Задача 23.** Показать, что в матричном кольце предыдущей задачи имеются делители нуля.

**Решение.** *Делителями нуля* называют такие элементы кольца, которые сами отличны от нуля, а в произведении дают нулевой элемент. Выберем из кольца  $M$  матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где числа  $a$  и  $b$  отличны от нуля. Тогда  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Таким образом,  $AB = 0$ , тогда как  $A \neq 0$  и  $B \neq 0$ . Следовательно, указанные матрицы  $A$  и  $B$  являются делителями нуля, т. е. кольцо  $M$  содержит делители нуля.

Заметим, что числовые кольца делителей нуля не содержат. Отсюда, в частности, следует, что кольцо  $M$  матриц задачи 23 не изоморфно никакому числовому кольцу.

Задача 24. Доказать, что множество  $M$  матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

где  $a, b$  — любые действительные числа, изоморфно множеству комплексных чисел  $K$ .

Решение. Установим между множествами  $K$  и  $M$  взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Проверим, сохраняется ли это соответствие при сложении и умножении.

$$\text{I. } \begin{matrix} (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

$$\text{II. } \begin{matrix} (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

Отсюда видно, что сумме и произведению комплексных чисел соответствует сумма и произведение соответствующих им матриц. Следовательно, множества  $M$  и  $K$  изоморфны относительно операций сложения и умножения.

Задача 25. Доказать, что множество  $S$  целых чисел и множество четных целых чисел  $S_1$  изоморфны относительно сложения и не изоморфны относительно умножения.

Решение. Установим между целыми числами и четными числами соответствие:

$$n \leftrightarrow 2n.$$

Очевидно, что это соответствие взаимно однозначное.

Пусть  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа. Им соответствуют четные числа  $2n_1$  и  $2n_2$ .

$$\begin{matrix} n_1 + n_2 = (n_1 + n_2) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2n_1 + 2n_2 = 2(n_1 + n_2). \end{matrix}$$

Отсюда видно, что результаты сложения также соответствуют друг другу. Следовательно, множества  $S$  и  $S_1$  относительно операции сложения изоморфны.

Теперь проверим, сохраняется ли наше соответствие при умножении.

$$\begin{array}{ccc} n_1 \cdot n_2 & = & n_1 n_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2n_1 \cdot 2n_2 & = & 4n_1 n_2. \end{array}$$

По установленному выше соответствию числу  $n_1 n_2$  соответствует четное число  $2n_1 n_2$ . Следовательно, числа  $n_1 n_2$  и  $4n_1 n_2$  не являются соответственными друг другу и, значит, наше соответствие относительно операции умножения не является изоморфизмом.

Однако отсюда еще нельзя сделать вывод о том, что множества  $S$  и  $S_1$  относительно умножения не изоморфны. Дело в том, что, может быть, можно установить какое-либо другое взаимно однозначное соответствие между множествами  $S_1$  и  $S$ , которое будет изоморфизмом относительно операции умножения. Поскольку различных соответствий между  $S$  и  $S_1$  можно установить много (бесконечное множество), то доказать, что множества  $S$  и  $S_1$  не изоморфны, перебором всех соответствий невозможно. Значит, для решения нашей задачи следует избрать другой путь. Решим ее следующим образом. Допустим, что множества  $S$  и  $S_1$  изоморфны относительно умножения и пусть целым числам  $n$  и  $1$  соответствуют некоторые четные числа  $n' \neq 0$  и  $n'_1$ . Тогда так как  $n \cdot 1 = n$ , то вследствие изоморфизма должно быть

$$n' \cdot n'_1 = n'.$$

Но последнее равенство ни при каком четном числе  $n'_1$  не может быть верным. Полученное противоречие говорит о том, что наше допущение неверно и, следовательно, множества  $S$  и  $S_1$  относительно операции умножения не изоморфны.

### Упражнения

1. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:

- а) Множество четных чисел относительно сложения.
- б) Множество целых чисел относительно операции вычитания.
- в) Множество целых чисел, кратных числу  $n$ , относительно сложения.

д) Множество отличных от нуля несократимых обыкновенных дробей с четными знаменателями относительно умножения.

е) Множество положительных действительных чисел относительно умножения.

ф) Множество матриц  $n$ -го порядка с определителем, равным 1, относительно умножения матриц.

г) Множество матриц  $n$ -го порядка с определителем, равным 1, относительно операции сложения матриц.

h) Множество преобразований вида  $x \rightarrow ax^2 + b$  ( $a, b$  — действительные числа) множества действительных чисел относительно операции последовательного применения преобразований (см. задачу 16).

и) Множество параллельных переносов плоскости относительно операции их последовательного применения.

2. Показать, что множество  $\{a\}$  степеней подстановки

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

образует группу относительно операции умножения подстановок. Составить таблицу умножения.

3. Образует ли группу множество элементов  $M = \{a, b, c, d, e\}$  относительно операции умножения, заданной: а) таблицей 9; б) таблицей 10 (см. стр. 104).

В том случае, когда  $M$  — группа, найти ее единичный элемент и для каждого элемента — обратный. Будет ли эта группа циклической?

4. Показать изоморфизм групп а) и б) из трех элементов, приведенных в задаче 19.

5. Показать, что группа комплексных чисел  $1, -1, i, -i$  (см. задачу 8) изоморфна группе из упражнения 2.

6. Доказать, что группа всех действительных чисел по сложению (аддитивная группа действительных чисел) изоморфна группе положительных действительных чисел относительно умножения. (Указание: рассмотреть соответствие  $a \leftrightarrow \lg a$ .)

7. Порядком элемента  $a$  группы называется наименьшее натуральное число  $n$ , такое, что  $a^n = e$ , где  $e$  — единичный элемент группы.

Доказать, что в любой конечной группе порядки элементов  $ab$  и  $ba$  одинаковы.

8. Выяснить, какие из следующих числовых множеств

являются кольцами (полями) относительно сложения и умножения чисел:

- а) Множество четных чисел.
- б) Множество рациональных чисел.
- в) Множество чисел вида  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a, b$  — любые рациональные числа.
- г) Множество комплексных чисел вида  $a + bi$ , где  $a, b$  — рациональные числа (множество гауссовых чисел).

Таблица 9

$\times$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$b$	$d$	$e$	$c$	$a$
$b$	$e$	$b$	$a$	$d$	$b$
$c$	$d$	$c$	$d$	$a$	$c$
$d$	$b$	$a$	$c$	$e$	$d$
$e$	$a$	$c$	$b$	$d$	$e$

Таблица 10

$\times$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$a$
$b$	$c$	$d$	$e$	$a$	$b$
$c$	$d$	$e$	$a$	$b$	$c$
$d$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$
$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$

е) Множество комплексных чисел вида  $a + bi$ , где  $a, b$  — целые числа (множество целых гауссовых чисел).

ф) Множество чисел вида  $a + b\sqrt[3]{2}$  с рациональными  $a$  и  $b$ .

9. Выяснить, какие из следующих множеств матриц с действительными элементами являются кольцами (полями) относительно сложения и умножения матриц:

- а) Множество диагональных матриц порядка  $n > 2$ ,

г. е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

б) Множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

с) Множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

д) Множество треугольных матриц порядка  $n \geq 2$ , т. е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

е) Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

ф) Множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  — любое действительное число.

10. Образуют ли кольцо (поле) множество двумерных векторов  $(a; b)$  с действительными координатами относительно следующих операций сложения и умножения:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)?$$

11. Показать, что поле матриц задачи 9f изоморфно полю действительных чисел.

12. Показать, что множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix},$$

где  $a, b$  — рациональные числа, образует кольцо, изоморфное кольцу упорядочения  $\mathbb{R}$ .

13. Показать, что множество двумерных векторов упорядочения  $\mathbb{R}$  изоморфно кольцу матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  (см. задачу 20).

14. Показать, что во множествах упорядочений  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  существуют делители нуля.

15. Доказать, что в поле делителей нуля не существует, т. е. если в поле  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то и  $ab \neq 0$ .

## § 12. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Задача 1. Решить уравнение

$$(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i$$

относительно действительных неизвестных  $x$  и  $y$ .

Решение. Левую часть уравнения можно рассматривать как некоторое неизвестное комплексное число. Приведя его к виду  $a + bi$ , получим уравнение, равносильное данному:

$$(2x + 5y) + (-x + 6y)i = 1 - 3i.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты перед  $i$ , то имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1, \\ -x + 6y &= -3. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим:  $x = \frac{21}{17}$ ;  $y = -\frac{5}{17}$ .

Замечание. При решении задачи 1 мы существенно использовали то, что  $x$  и  $y$  — по условию действительные числа. Если  $x$  и  $y$  — комплексные числа, то приведенное решение неверно, так как в этом случае  $2x + 5y$  нельзя считать действительной частью искомого числа (аналогично и  $-x + 6y$  не будет коэффициентом при  $i$ ).

Задача 2. Вычислить

$$i^{36}, i^{48}, i^{125}, i^{239}.$$

Решение. Пусть  $n$  — любое целое число и требуется вычислить  $i^n$ . Заметим, что  $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ . Теперь разделим с остатком  $n$  на 4:

$$n = 4q + r, \quad 0 \leq r < 4.$$

Следовательно,  $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$ . Так как  $0 \leq r < 4$ , то остаток  $r$  может принимать лишь значения 0, 1, 2, 3. Значит, для возведения числа  $i$  в любые целые степени достаточно знать лишь степени

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

Теперь легко вычислить указанные в задаче степени. Числа 36, 46, 125 и 239 при делении на 4 дают соответственно остатки 0, 2, 1, 3. Следовательно,

$$i^{36} = i^0 = 1, \quad i^{46} = i^2 = -1, \quad i^{125} = i, \quad i^{239} = i^3 = -i.$$

Задача 3. Вычислить

$$(-i)^{25}, \quad -i^{25}, \quad (-i)^{10}, \quad -i^{10}.$$

Решение.  $-i = -1 \cdot i$ . Следовательно,

$$(-i)^{25} = (-1 \cdot i)^{25} = (-1)^{25} \cdot i^{25} = -1 \cdot i = -i.$$

$$-i^{25} = (-1) \cdot i^{25} = (-1) \cdot i = -i.$$

$$(-i)^{10} = (-1)^{10} \cdot i^{10} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Иначе: так как  $-i = \frac{1}{i}$ , то  $(-i)^{10} = \left(\frac{1}{i}\right)^{10} = \frac{1}{i^{10}} = \frac{1}{-1} = -1$ .

$$-i^{10} = (-1) \cdot i^{10} = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Задача 4. Найти значение функции

$$f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3+2i)$$

при  $x = 1 - 2i$ .

Решение.  $f(1 - 2i) = (1 - 2i)^4 + \frac{2+i}{1-2i} - (-3+2i)$ .

Для вычисления 1-го слагаемого воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (1 - 2i)^4 &= 1 + 4(-2i) + 6(-2i)^2 + 4(-2i)^3 + (-2i)^4 = \\ &= 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i. \end{aligned}$$

Второе слагаемое есть частное от деления двух комплексных чисел. Деление комплексных чисел обычно произ-

водят путем освобождения от мнимости в знаменателе, что достигается умножением числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

Итак,

$$f(1-2i) = (-7+24i) + i - (-3+2i) = -4+23i.$$

Задача 5. Выполнить указанные действия:

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}.$$

Решение. Здесь можно было бы произвести сначала возведение в степень в числителе и знаменателе, а затем деление. Однако более рациональным будет следующий путь:

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6} = \frac{(1+i)^6(1+i)^2}{(1-i)^6} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 (1+i)^2,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

Следовательно,

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6} = i^6 \cdot 2i = -2i.$$

Задача 6. Решить систему уравнений:

$$(2+i)x + (2-i)y = 6,$$

$$(3+2i)x + (3-2i)y = 8.$$

Найдем сначала определитель  $\Delta$  системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+i & 2-i \\ 3+2i & 3-2i \end{vmatrix} = (2+i)(3-2i) - (3+2i)(2-i) = -2i.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то данную систему уравнений можно решить по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2-i \\ 8 & 3-2i \end{vmatrix} = 2-4i; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+i & 6 \\ 3+2i & 8 \end{vmatrix} = -2-4i.$$

Отсюда

$$x = \frac{2-4i}{-2i} = 2+i; \quad y = \frac{-2-4i}{-2i} = 2-i.$$

**Задача 7.** Найти все комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

**Решение.** Пусть  $z = x + yi$  — искомое комплексное число. Здесь  $x$  и  $y$  — неизвестные действительные числа. Тогда число  $\bar{z}$ , сопряженное числу  $z$ , равно  $x - yi$ . По условию задачи имеем:  $z^2 = \bar{z}$ , или

$$(x + iy)^2 = x - yi.$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = x - yi.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны соответственно их действительные части и коэффициенты при мнимой единице. Следовательно, последнее уравнение равносильно следующей системе уравнений с действительными неизвестными  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x, \\ 2xy &= -y. \end{aligned} \quad (2)$$

Если  $y \neq 0$ , то система (2) равносильна системе

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x, \\ 2x &= -1, \end{aligned}$$

которая имеет следующие решения:

$$1) x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При  $y = 0$  система (2) равносильна уравнению

$$x^2 = x,$$

которое имеет два решения:  $x = 0$  и  $x = 1$ . Итак, искомым чисел четыре:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{i}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; & z_2 &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; & z_3 &= 0 + 0i = 0, \\ z_4 &= 1 + 0i = 1. \end{aligned}$$

Из них два числа  $z_3$  и  $z_4$  — действительные, а два других  $z_1$  и  $z_2$  — мнимые<sup>1</sup> и сопряженные друг другу.

**Задача 8.** Доказать тождество

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2},$$

<sup>1</sup> Здесь, как и всюду ниже, *мнимым числом* мы называем такое комплексное число, у которого коэффициент при мнимой единице отличен от нуля.

где  $z_1$  и  $z_2$  — любые комплексные числа, а  $\bar{z}$  означает число, сопряженное с  $z$ .

Решение. Пусть  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ .

Тогда  $\bar{z}_1 = a - bi$  и  $\bar{z}_2 = c - di$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 &= (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i; \\ z_1 \cdot z_2 &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Сравнивая полученные результаты, находим:

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}.$$

**Задача 9.** Найти значения корня квадратного из числа  $a + bi$ .

Решение. Пусть

$$\sqrt{a + bi} = x + yi,$$

где  $x$  и  $y$  — неизвестные действительные числа. Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим:

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Последнее уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b.\end{aligned}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим полученные уравнения. Получим:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Отсюда имеем:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где в правой части следует иметь в виду арифметический корень, ибо  $x^2 + y^2 \geq 0$ . Учитывая, кроме того, что  $x^2 - y^2 = a$ , имеем:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Так как  $\sqrt{a^2 + b^2} > |a|$ , то оба полученные числа — положительны. Извлекая из них квадратные корни, получим действительные значения для  $x$  и для  $y$ :

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Из соотношения  $2xy = b$  следует, что при  $b > 0$  числа  $x$  и  $y$  имеют одинаковые знаки, а при  $b < 0$  — противоположные. Отсюда имеем формулу:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

В скобках перед радикалом берется знак  $+$ , если  $b > 0$ , и  $-$ , если  $b < 0$ .

Задача 10. Вычислить  $\sqrt{-3-4i}$ .

Решение. Воспользуемся формулой, найденной в предыдущей задаче. Получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{-3-4i} = \pm \left( \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}} - \right. \\ \left. - i \sqrt{\frac{3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}} \right) = \pm (1 - 2i). \end{aligned}$$

Задача 11. Решить уравнение

$$(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

Решение. По формуле для корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{5-i \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{5-i \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Извлекая корень квадратный из числа  $-2i$ , получим:

$$\sqrt{-2i} = \pm (1-i).$$

Следовательно,  $x_{1,2} = \frac{5-i \pm (1-i)}{4+2i}$ . Отсюда

$$x_1 = \frac{5-i+1-i}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5-5i}{5} = 1-i;$$

$$x_2 = \frac{5-i-(1-i)}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{2(2-i)}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

## 2. Геометрическое изображение и тригонометрическая форма комплексного числа

Задача 12. Найти геометрически сумму и разность комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 3 - 2i.$$

**Решение.** Геометрическим изображением комплексно-го числа  $a + bi$  на плоскости  $xOy$  является точка с координатами  $(a, b)$ . Поэтому зачастую комплексное число  $z = a + bi$  называют точкой с координатами  $(a, b)$ . Иногда геометрическим образом числа  $a + bi$  считают вектор, идущий из начала координат в точку  $(a, b)$ , т. е. радиус-вектор с концом в точке  $(a, b)$ . В связи с этим о комплексном числе можно говорить как о радиусе-векторе (радиус-вектор, соответствующий комплексному числу  $z$ , мы будем обозначать через  $z$ ). Обе эти геометрические интерпретации комплексных чисел равноправны.

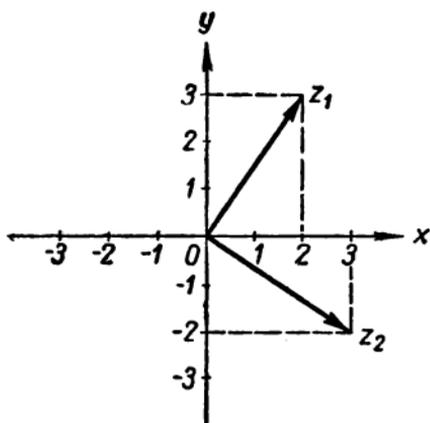


Рис. 2.

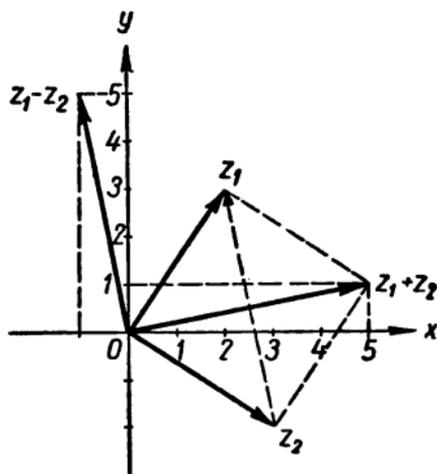


Рис. 3.

На рисунке 2 изображены радиусы-векторы, соответствующие числам  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 3 - 2i$ . Сложение векторов производится по правилу параллелограмма. Для нахождения разности  $z_1 - z_2$  достаточно построить вектор с началом в точке  $z_2$  и концом в точке  $z_1$ , а затем перенести этот вектор параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Пользуясь этими правилами, найдем сумму и разность наших векторов  $z_1$ ,  $z_2$  (рис. 3). Из рисунка видно, что координатами точек  $z_1 + z_2$  и  $z_1 - z_2$  являются соответственно пары чисел  $(5; 1)$  и  $(-1; 5)$ .

Следовательно,

$$z_1 + z_2 = 5 + i; \quad z_1 - z_2 = -1 + 5i.$$

Задача 13. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $-1 + i\sqrt{3}$ . Записать это число в тригонометрической форме.

Решение. Модуль комплексного числа  $z = a + bi$  является длиной радиуса-вектора  $z$ , обозначается  $|z|$  и находится по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

причем корень берется арифметический, так как  $|z|$  (длина отрезка) — число положительное. Аргумент числа  $z$  есть угол  $\varphi$  между положительным направлением оси  $Ox$  и радиусом-вектором  $z$ , обозначается  $\text{Arg } z$  и находится из соотношений:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

В нашей задаче  $z = -1 + i\sqrt{3}$  (т. е.  $a = -1$ ,  $b = \sqrt{3}$ ),  $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ;  $\cos \varphi = \frac{-1}{2}$ ;  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Отсюда  $\text{Arg } z = \varphi = \frac{2\pi}{3}$ .

Теперь запишем число  $z$  в тригонометрической форме:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Замечания. 1. Очевидно, что аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до числа, кратного  $2\pi$ . На практике в качестве аргумента обычно берут наименьший положительный или наименьший по абсолютной величине угол.

2. Во избежание ошибок при нахождении аргумента комплексное число надо изображать геометрически или хотя бы мысленно представлять его образ (радиус-вектор).

3. Модуль и аргумент комплексного числа  $z$  являются известными из аналитической геометрии полярными координатами точки, соответствующей числу  $z$ . При этом полярной осью служит ось  $Ox$ .

Задача 14. Найти геометрическое место точек (г. м. т.)  $z$ , для которых:

$$\text{a) } |z| = 2; \quad \text{b) } \text{Arg } z = \frac{3}{4}\pi.$$

Решение. а) Всякое комплексное число, модуль которого равен 2, изображается точкой, находящейся на расстоянии двух единиц от начала координат, т. е. находящейся на окружности радиуса 2 и с центром в начале координат. Обратно, всякая точка этой окружности изображает комплексное число, модуль которого равен 2. Следовательно, геометрическим местом точек  $z$ , для которых  $|z| = 2$  является окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

б) Если  $\text{Arg } z = \frac{3}{4}\pi$ , то точка  $z$  лежит на луче, выходящем из начала координат под углом  $\frac{3}{4}\pi$  к положительному направлению оси  $Ox$ . Обратно, всякая точка  $z$  этого луча, отличная от начала координат, имеет аргумент  $\frac{3}{4}\pi$ . У точки  $z = 0$  (начало координат) аргумент не определен. Таким образом, искомое г. м. т. образует луч, выходящий из начала координат под углом  $\frac{3}{4}\pi$  к положительному направлению оси  $Ox$ .

Задача 15. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — два произвольных комплексных числа и  $\rho(z_1, z_2)$  — расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$ . Показать, что  $|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2)$ .

Решение. Как было отмечено при решении задачи 12, вектор, соответствующий числу  $z_1 - z_2$ , получается параллельным переносом вектора, идущего от точки  $z_2$  к точке  $z_1$ . Но модуль числа  $z_1 - z_2$  есть длина радиуса-вектора, соответствующего этому числу. Отсюда следует, что

$$|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2).$$

Задача 16. Найти геометрическое место точек  $z$ , для которых:

$$\text{а) } |z - (2 + i)| < 3; \quad \text{б) } |z - (2 + i)| \leq 3; \quad \text{в) } |z + 2i| > 1.$$

Решение. а) В предыдущей задаче было показано, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками плоскости, изображающими эти числа. Следовательно, неравенству  $|z - (2 + i)| < 3$  удовлетворяют те и только те точки  $z$ , которые находятся от точки  $2 + i$  на расстоянии, меньшем 3 единиц. Это значит, что искомым геометрическим местом точек является открытый круг с центром в точке  $2 + i$  и радиусом 3

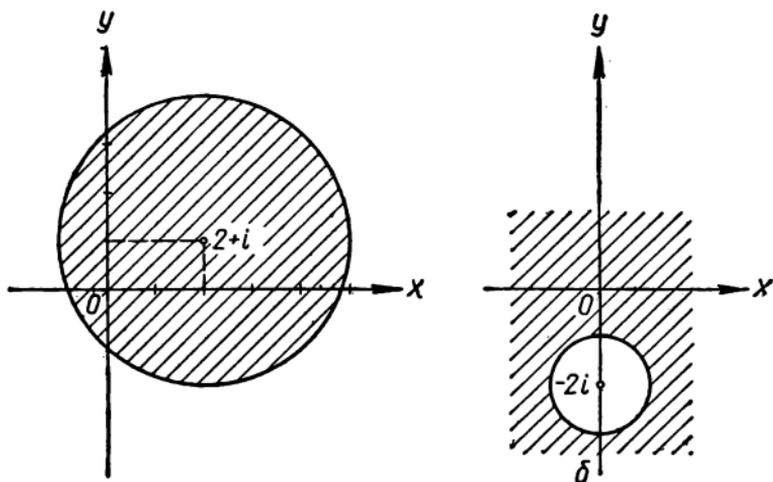


Рис. 4.

(рис. 4, а). *Открытым* этот круг называется по той причине, что ему не принадлежат его граничные точки, т. е. точки окружности с центром  $2+i$  и радиусом 3.

б) В этом случае искомое г. м. т. состоит из тех же точек, что и в случае а), и, кроме того, содержит точки граничной окружности. Следовательно, здесь искомым г. м. т. является замкнутый круг с центром в точке  $2+i$  и радиусом 3.

с) Представим сумму  $z+2i$  в виде разности двух комплексных чисел:

$$z+2i = z - (-2i).$$

Тогда неравенство б) примет вид:

$$|z - (-2i)| > 1.$$

Отсюда видно, что искомым г. м. т. является часть плоскости, внешняя к окружности с центром в точке  $-2i$  радиуса 1. При этом точки самой окружности искомому г. м. т. не принадлежат (рис. 4, б).

Задача 17. Найти геометрическое место точек  $z$ , удовлетворяющих уравнению

$$|z-a| + |z-b| = 8.$$

Решение. Как было показано выше (задача 15), число  $|z-a|$  геометрически означает расстояние между точками  $a$  и  $z$ . Аналогично, число  $|z-b|$  равно расстоянию

между точками  $b$  и  $z$ . Следовательно, данному уравнению удовлетворяют те и только те точки  $z$ , сумма расстояний которых от точек  $a$  и  $b$  равна постоянному числу 8. Как известно, множество таких точек образует эллипс с фокусами в точках  $a$  и  $b$ , большая ось которого равна 8.

**Задача 18.** Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произвести указанные действия:

$$\text{а) } \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i}; \quad \text{б) } \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

**Решение.** а) Представим сначала каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} (1-i\sqrt{3}) &= 2 \left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right), \\ -\sqrt{3}+i &= 2 \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right), \\ 1+i &= \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме производится по следующим формулам:

$$\begin{aligned} [\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] [\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] &= \\ = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i} &= \frac{2 \left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) \cdot 2 \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)}{\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \\ &= \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{27}{12}\pi + i\sin\frac{27}{12}\pi\right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1+i). \end{aligned}$$

б) В этом случае первый из двух сомножителей уже представлен в тригонометрической форме. Относительно второго сомножителя этого сказать нельзя, ибо здесь в скобках стоит знак  $-$  вместо нужного знака  $+$ . Поэтому представим сначала второй сомножитель в тригонометрической форме. Для этого мы воспользуемся четностью косинуса и нечетностью синуса:  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ ;  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ . Тогда можно записать:

$$\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \\ & = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

Задача 19. Вычислить:

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^6}{(i - 1)^{12}}.$$

Решение. Возведение комплексных чисел в степень легко произвести, используя так называемую формулу Муавра:

$$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

По этой формуле:

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^{12} &= \left[2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right)\right]^{12} = 2^{12} \left(\cos \frac{60\pi}{3} + i \sin \frac{60\pi}{3}\right) = 2^{12} (\cos 20\pi + i \sin 20\pi) = 2^{12} (1 + 0 \cdot i) = 2^{12}. \\ (1 + i\sqrt{3})^6 &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^6 = 2^6 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^6. \\ (i - 1)^{12} &= (-1 + i)^{12} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)\right]^{12} = \\ &= (\sqrt{2})^{12} (\cos 9\pi + i \sin 9\pi) = 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = \\ &= 2^6 (-1 + 0 \cdot i) = -2^6. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{(1 - i\sqrt{3})^{12} - (1 + i\sqrt{3})^6}{(i - 1)^{12}} &= \frac{2^{12} - 2^6}{-2^6} = \frac{2^6(2^6 - 1)}{-2^6} = \\ &= -(2^6 - 1) = -63. \end{aligned}$$

**Задача 20.** Выяснить геометрический смысл произведения двух комплексных чисел.

**Решение.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — произвольные комплексные числа. Запишем их в тригонометрической форме:

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются ( $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ), а аргументы складываются ( $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$ ). Следовательно, чтобы умножить комплексное число  $z_1$  на комплексное число  $z_2$  ( $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ ), нужно длину вектора  $z_1$  увеличить в  $|z_2|$  раз (говорят: вектор  $z_1$  растянуть в  $|z_2|$  раз), а затем полученный вектор повернуть вокруг начала координат на угол  $\text{Arg} z_2$ . Если хотя бы одно из чисел  $z_1$  и  $z_2$  равно нулю, то и их произведение равно нулю.

**Задача 21.** Выразить  $\cos 3x$  и  $\sin 3x$  через  $\cos x$  и  $\sin x$ .

**Решение.** Возьмем комплексное число

$$\alpha = \cos x + i \sin x$$

и возведем его в 3-ю степень, пользуясь формулами Муавра и бинома Ньютона.

Получим: с одной стороны,

$$\alpha^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x,$$

с другой стороны,

$$\alpha^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x).$$

Так как комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты при  $i$ , то имеем:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x. \end{aligned}$$

**Замечание.** Точно так же можно выразить через  $\sin x$  и  $\cos x$  функции  $\sin nx$  и  $\cos nx$  при любом натуральном  $n$ .

**Задача 22.** Вычислить сумму:

$$S = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n - 1)x.$$

**Решение.** Для определения искомой суммы найдем сначала сумму  $T + Si$ , где  $T = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n - 1)x$ .

$$T + Si = (\cos x + i \sin x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + (\cos 5x + i \sin 5x) + \dots + (\cos (2n-1)x + i \sin (2n-1)x).$$

Обозначив число  $\cos x + i \sin x$  через  $\alpha$  и имея в виду, что  $\cos kx + i \sin kx = \alpha^k$ , получим:  $T + Si = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \dots + \alpha^{2n-1}$ . По формуле суммы геометрической прогрессии имеем:

$$\begin{aligned} T + Si &= \frac{\alpha^{2n+1} - \alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{\cos (2n+1)x + i \sin (2n+1)x - \cos x - i \sin x}{\cos 2x + i \sin 2x - 1} = \\ &= \frac{[\cos (2n+1)x + i \sin (2n+1)x - \cos x - i \sin x](\cos 2x - 1 - i \sin 2x)}{[(\cos 2x - 1) + i \sin 2x][(\cos 2x - 1) - i \sin 2x]} = \\ &= \frac{[\cos (2n+1)x \cos 2x + \sin (2n+1)x \sin 2x] - [\cos x \cos 2x + \\ &\quad + \sin x \sin 2x + \cos (2n+1)x - \cos x]}{2 - 2 \cos 2x} + \\ &+ \frac{(\sin (2n+1)x \cos 2x - \cos (2n+1)x \sin 2x) + (\cos x \sin 2x - \\ &\quad - \sin x \cos 2x) - \sin (2n+1)x + \sin x}{2(1 - \cos 2x)} i = \\ &= \frac{\cos (2n-1)x - \cos (2n+1)x}{4 \sin^2 x} + \frac{\sin (2n-1)x - \sin (2n+1)x + 2 \sin x}{4 \sin^2 x} i. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное число с равным ему числом  $T + Si$ , находим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sin (2n-1)x - \sin (2n+1)x + 2 \sin x}{4 \sin^2 x} = \frac{-2 \cos 2nx \sin x + 2 \sin x}{4 \sin^2 x} = \\ &= \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{2 \sin^2 nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}. \end{aligned}$$

**Задача 23.** Найти сумму:

$$S = \cos x - C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x - \dots + (-1)^n C_n^n \cos (n+1)x.$$

**Решение.** Обозначим через  $T$  сумму

$$\sin x - C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x - \dots + (-1)^n C_n^n \sin (n+1)x$$

и найдем число  $S + Ti$ :

$$\begin{aligned} S + Ti &= (\cos x + i \sin x) - C_n^1 (\cos 2x + i \sin 2x) + C_n^2 (\cos 3x + \\ &+ i \sin 3x) - \dots + (-1)^n C_n^n [\cos (n+1)x + i \sin (n+1)x] = \\ &= \alpha - C_n^1 \alpha^2 + C_n^2 \alpha^3 - \dots + (-1)^n C_n^n \alpha^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \cos x + i \sin x.$$

Отсюда

$$S + Ti = \alpha [1 - C_n^1 \alpha + C_n^2 \alpha^2 - \dots + (-1)^n C_n^n \alpha^n] = \\ = \alpha (1 - \alpha)^n = (\cos x + i \sin x) (1 - \cos x - i \sin x)^n.$$

Найдем предварительно  $1 - \cos x - i \sin x$ .

$$1 - \cos x - i \sin x = 1 + \cos(\pi + x) + i \sin(\pi + x) = \\ = 2 \cos^2 \frac{\pi + x}{2} + 2i \sin \frac{\pi + x}{2} \cos \frac{\pi + x}{2} = \\ = 2 \cos \frac{\pi + x}{2} \left( \cos \frac{\pi + x}{2} + i \sin \frac{\pi + x}{2} \right).$$

Подставляя найденное значение, получим:

$$S + Ti = (\cos x + i \sin x) 2^n \cos^n \frac{\pi + x}{2} \left( \cos n \frac{\pi + x}{2} + \right. \\ \left. + i \sin n \frac{\pi + x}{2} \right) = 2^n \cos^n \frac{\pi + x}{2} \left[ \cos \left( n \frac{\pi + x}{2} + x \right) + \right. \\ \left. + i \sin \left( n \frac{\pi + x}{2} + x \right) \right].$$

Отсюда, приравнявая действительные части полученного числа и числа  $S + Ti$ , найдем:

$$S = 2^n \cos^n \frac{\pi + x}{2} \cdot \cos \left( n \frac{\pi + x}{2} + x \right),$$

а так как

$$\cos \frac{\pi + x}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) = -\sin \frac{x}{2}$$

и

$$n \frac{\pi + x}{2} + x = \frac{n\pi + (n+2)x}{2},$$

то можно записать:

$$S = (-1)^n \cdot 2^n \sin^n \frac{x}{2} \cos \frac{n\pi + (n+2)x}{2}.$$

**Задача 24.** Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных  $x$ , функции:

а)  $\cos^5 x$ ;    б)  $\sin^4 x$ .

**Решение.** а) Пусть

$$\alpha = \cos x + i \sin x.$$

Тогда

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x.$$

Отсюда имеем равенства:

$$\cos x = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}; \quad \sin x = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}.$$

Возведем первое из этих равенств в 5-ю степень:

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2} + 10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5}}{2^5} = \\ &= \frac{(\alpha^5 + \alpha^{-5}) + 5(\alpha^3 + \alpha^{-3}) + 10(\alpha + \alpha^{-1})}{2^5}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\alpha^n = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$  и  $\alpha^{-n} = \cos nx - i \sin nx$ , получим:

$$\cos^5 x = \frac{2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x}{2^5} = \frac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \frac{(\alpha - \alpha^{-1})^4}{(2i)^4} = \frac{(\alpha^4 + \alpha^{-4}) - 4(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 6}{16} = \\ &= \frac{2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6}{16} = \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}. \end{aligned}$$

**Задача 25.** Вычислить все значения  $\sqrt[4]{-4}$  и изобразить их геометрически.

**Решение.** Как известно, корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  имеет  $n$  различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где  $\sqrt[n]{\rho}$  — арифметическое значение корня, а число  $k$  пробегает значения  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Представим число  $-4$  в тригонометрической форме:

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$\sqrt[4]{4(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[4]{4} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right).$$

Придавая параметру  $k$  значения  $0, 1, 2, 3$ , получим 4 значения корня 4-й степени из  $-4$ :

$$\beta_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$$\beta_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i,$$

$$\beta_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i,$$

$$\beta_3 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i.$$

Изображение найденных корней на комплексной плоскости

дано на рисунке 5.

Задача 26. Вычислить:

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

Представим числа  $1-i$  и  $\sqrt{3}+i$  в тригонометрической форме:

$$1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right),$$

$$\sqrt{3}+i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

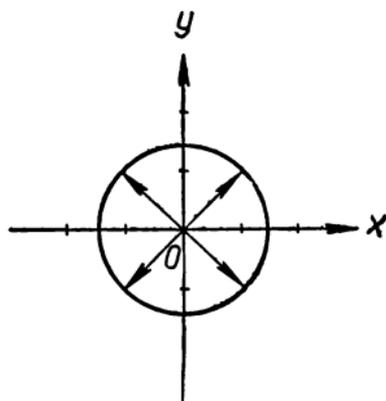


Рис. 5.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2} \left( \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)}{2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( \frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right]} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi \right)} = \\ &= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{19\pi + 2\pi k}{12} + i \sin \frac{19\pi + 2\pi k}{12} \right)}. \end{aligned}$$

Придавая  $k$  значения  $0, 1, \dots, 5$ , получим 6 значений искомого корня:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{19}{72}\pi + i \sin \frac{19}{72}\pi \right),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{43}{72} \pi + i \sin \frac{43}{72} \pi \right),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{67}{72} \pi + i \sin \frac{67}{72} \pi \right),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{91}{72} \pi + i \sin \frac{91}{72} \pi \right),$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{115}{72} \pi + i \sin \frac{115}{72} \pi \right),$$

$$\beta_5 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \left( \cos \frac{139}{72} \pi + i \sin \frac{139}{72} \pi \right).$$

Задача 27. Пользуясь корнями 3-й степени из 1, вычислить  $\sqrt[3]{-8i}$ .

Решение. Известно, что все значения корня  $n$ -й степени из числа  $a$  можно получить, умножая одно из них на все значения корня  $n$ -й степени из 1. Одно из значений  $\sqrt[3]{-8i}$  можно найти непосредственно. Оно равно  $2i$ , ибо  $(2i)^3 = -8i$ .

Найдем теперь все значения  $\sqrt[3]{1}$ :

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

$$\varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, имеем три значения для  $\sqrt[3]{-8i}$ :

$$\beta_0 = 2i \cdot \varepsilon_0 = 2i,$$

$$\beta_1 = 2i \cdot \varepsilon_1 = -\sqrt{3} - i,$$

$$\beta_2 = 2i \cdot \varepsilon_2 = \sqrt{3} - i.$$

Задача 28. Пользуясь корнями 4-й степени из 1, найти все значения  $\sqrt[4]{5}$ .

Решение. Одним значением  $\sqrt[4]{5}$  является его арифметическое (положительное) значение  $\beta_0 \approx 1,50$ . Остальные корни найдем, умножая  $\beta_0$  на корни 4-й степени из 1, которыми являются числа  $1, -1, i, -i$ .

Итак,  $\sqrt[4]{5}$  имеет 4 значения:

$$\beta_0 \approx 1,50; \quad \beta_1 \approx -1,50; \quad \beta_2 \approx 1,50i; \quad \beta_3 \approx -1,50i.$$

**Задача 29.** Доказать, что сумма всех корней  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  равна нулю.

**Решение.** Пусть  $\beta_0$  — некоторое определенное значение  $\sqrt[n]{z}$ . Тогда все значения  $\sqrt[n]{z}$  получатся умножением  $\beta_0$  на значения  $\sqrt[n]{1}$ :  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ . Найдем  $\varepsilon_k$ .

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}.$$

Придавая  $k$  значения  $0, 1, \dots, n-1$ , мы получим соответственно  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ . Таким образом, можно написать:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

С другой стороны, возводя  $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  в  $k$ -ю степень, получим:

$$\varepsilon_1^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}.$$

Следовательно,  $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$  и

$$S = \beta_0 + \beta_0 \varepsilon_1 + \beta_0 \varepsilon_1^2 + \dots + \beta_0 \varepsilon_1^{n-1}.$$

Это есть геометрическая прогрессия с первым членом  $\beta_0$  и знаменателем  $\varepsilon_1$ . Суммируя, найдем:

$$S = \frac{\beta_0 \varepsilon_1^{n-1} \cdot \varepsilon_1 - \beta_0}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{\beta_0 - \beta_0}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

### Упражнения

**1.** Произвести действия над комплексными числами в алгебраической форме:

а)  $(1 + i)(2 + i) + \frac{5}{1 + 2i}$ ;

б)  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - (1 - i)^{12}$ ;

в)  $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$ ;

д)  $\frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$  ( $n$  — целое положительное число).

2. Решить уравнения относительно вещественных переменных  $x, y$ :

a)  $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ ;

b)  $\frac{6x - iy}{5 + 2i} = \frac{15}{8x + 3yi}$ ;

c)  $2 + 5ix - 3yi = 14i + 3x - 5y$ .

3. Найти значения следующих многочленов:

a)  $x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$  при  $x = i$ ;

b)  $2x^3 + 3\sqrt[3]{4}x^2y + 3\sqrt[3]{2}xy^2 + y^3$  при  $x = 1 + i, y = -i\sqrt[3]{2}$ ;

c)  $3x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 3y^3$  при  $x = 1 + 2i, y = 2 + i$ .

4. Извлечь квадратный корень:

a)  $\sqrt{8 + 6i}$ ; b)  $\sqrt{3 - 4i}$ ; c)  $\sqrt{-15 + 3i\sqrt{11}}$ .

5. Решить уравнения:

a)  $x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$ ;

b)  $x^2 + (1 - 2i)x - 2i = 0$ ;

c)  $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ .

6. Доказать:

a)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ; b)  $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ ;

c)  $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$ .

7. Используя результаты задачи 8 и упражнения 6, доказать следующее утверждение: если  $f(z)$  есть многочлен с действительными коэффициентами, то

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

8. Найти все комплексные числа, каждое из которых сопряжено с самим собой.

9. Как связаны между собой два мнимых числа, сумма и произведение которых являются действительными числами?

10. Найти числа, сопряженные своему кубу.

11. Построить точки, изображающие комплексные числа:

$$2, -2i; 3i; 1 + 2i; -1 + i; 5 - 2i; -3 - i.$$

12. Построить векторы, изображающие сумму и разность комплексных чисел:

а)  $2 - i$  и  $1 + 3i$ , б)  $-3 + 2i$  и  $5 + i$ , в)  $2i$  и  $-3 - 4i$ .

13. Доказать геометрически неравенство

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

и выяснить, при каких условиях имеет место равенство.

14. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) 3; б)  $-\sqrt{2}$ ; в)  $i$ ; д)  $-i$ ; е)  $-1 + i$ ; ф)  $-1 - i$ ;  
г)  $\sqrt{3} + i$ ; х)  $\sqrt{3} - i$ ; и)  $-\sqrt{3} + i$ ; к)  $-\sqrt{3} - i$ ; л)  $-3i$ ;  
м)  $5i$ .

15. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа  $z$ , для которых:

а)  $|z| \leq 3$ ; б)  $|z| > 3$ ; в)  $|z - 3i| < 1$ ; д)  $|z + 3 - 2i| > 2$ ;

е)  $\text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$ ; ф)  $\text{Arg } z = 310^\circ$ ; г)  $|z - 3| + |z - 2i| = 7$ ;

х)  $|z + 2i| + |z - 4 + i| = 15$ ; и)  $|z - a| - |z - b| = c$ ;

к)  $|z - 4| - |z - 2i| = 10$ .

16. Пользуясь тригонометрической формой комплексного числа, найти условия, при которых:

а)  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ; б)  $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$ .

17. Доказать формулу

$$[\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi).$$

18. Выяснить, при каких условиях верны равенства:

а)  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$ ;

б)  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) - i \sin(\varphi + \psi)$ .

19. Произвести вычисления, пользуясь правилами действий над комплексными числами в тригонометрической форме:

а)  $(1 + i\sqrt{3})(i + 1)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ;

б)  $\frac{(1 - i\sqrt{3})(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{2(1 - i)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$ ; в)  $(1 + i)^{25}$ ; д)  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ ;

$$е) \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

20. Вычислить суммы:

a)  $1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + \dots + 2 \cos nx$ ;

b)  $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$ ;

c)  $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos (n+1)x$ ;

d)  $\sin x + C_n^1 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin (n+1)x$ .

21. Извлечь корни:

a)  $\sqrt[3]{i}$ ; b)  $\sqrt[3]{2-2i}$ ; c)  $\sqrt[4]{-4}$ ; d)  $\sqrt[6]{1}$ ; e)  $\sqrt[6]{-27}$ ;

f)  $\sqrt[6]{\frac{1-i}{i+1\sqrt{3}}}$ ; g)  $\sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ ; h)  $\sqrt[4]{(2+2i)(-1+i\sqrt{3})}$ .

22. Решить следующие двучленные уравнения:

a)  $x^4 + 1 = 0$ ; b)  $x^6 - 1 = 0$ ; c)  $x^5 + 1 = 0$ ;

d)  $x^{12} - 8 = 0$ ; e)  $x^4 + 2(\sqrt{3} - i) = 0$ .

### § 13. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ С ОСТАТКОМ. СХЕМА ГОРНЕРА. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

#### 1. Алгоритм Евклида

Задача 1. Разделить с остатком многочлен

$$f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 2$$

на многочлен

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1.$$

Решение. Разделить с остатком многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  — это значит найти два таких многочлена  $q(x)$  (частное) и  $r(x)$  (остаток), что:

1)  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ;

2) или  $r(x) = 0$ , или степень  $r(x) <$  степени  $g(x)$ .

Алгоритм деления многочленов с остатком известен из школьного курса алгебры. Это так называемая схема «деления углом». Воспользуемся этой схемой для решения нашей задачи.

$$\begin{array}{r|l}
6x^5 + 13x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 2 & 2x^3 + x^2 - 1 \\
- 6x^5 + 3x^4 & 3x^2 + 5x - 4 \\
\hline
10x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x + 2 & \\
- 10x^4 + 5x^3 & - 5x \\
\hline
- 8x^3 - 4x^2 + 11x + 2 & \\
- 8x^3 - 4x^2 & + 4 \\
\hline
& 11x - 2
\end{array}$$

Итак, частное  $q(x) = 3x^2 + 5x - 4$  и остаток  $r(x) = 11x - 2$ .

**Задача 2.** Известны делимое  $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$ , частное  $q(x) = 2x^2 + 3x + 2$  и остаток  $r(x) = -4x - 3$ . Найти делитель  $\varphi(x)$ .

**Решение.** По определению деления с остатком имеем:

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x). \quad (1)$$

Из соотношения (1) следует, что степень неизвестного многочлена  $\varphi(x)$  равна 2. Кроме того, легко видеть, что старший коэффициент многочлена  $\varphi(x)$  равен 1. Значит,

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b,$$

где  $a$  и  $b$  — неопределенные коэффициенты. Подставив известные многочлены и многочлен  $\varphi(x)$  с неопределенными коэффициентами, получим:

$$\begin{aligned}
2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 &= (x^2 + ax + b)(2x^2 + 3x + 2) + (-4x - 3) = \\
&= 2x^4 + (3 + 2a)x^3 + (2 + 3a + 2b)x^2 + (2a + 3b - 4)x + \\
&\quad + (2b - 3).
\end{aligned}$$

Так как два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного, то, приравнявая соответствующие коэффициенты многочленов левой и правой части последнего равенства, получим систему уравнений относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned}
3 + 2a &= 1, \\
2 + 3a + 2b &= 3, \\
2a + 3b - 4 &= 0, \\
2b - 3 &= 1.
\end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение:  $a = -1$ ;  $b = 2$ . Следовательно,  $\varphi(x) = x^2 - x + 2$ .





$$\begin{array}{r}
6x^5 - 14x^3 + 6x^2 - 14 \quad | \quad 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 \\
\underline{6x^5 - 9x^4 + 6x^2 - 9x} \quad | \quad 3x \parallel + 9 \\
9x^4 - 14x^3 + 9x - 14 \\
\underline{-18x^4 - 28x^3 + 18x - 28} \\
18x^4 - 27x^3 + 18x - 27 \\
\underline{-x^3 - 1} \\
x^3 + 1
\end{array}$$

Здесь мы первый промежуточный остаток умножили на 2 (в результате частное стало неверным — в знак этого члены частного отделены двойной вертикальной чертой) и последний остаток на  $-1$ .

Теперь надо делить многочлен  $2x^4 - 3x^3 + 2x - 3$  на  $x^3 + 1$ . Мы знаем, что здесь остаток будет равен нулю. Значит,

$$(f(x), \varphi(x)) = x^3 + 1.$$

**Задача 4.** Пользуясь алгоритмом Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3, \\
\varphi(x) &= 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.
\end{aligned}$$

**Решение.** Решим эту задачу с учетом сделанного выше замечания. При этом мы не будем приводить подробных объяснений.

$$\begin{array}{r}
2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6 \quad | \quad 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\
\underline{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x} \quad | \quad x \parallel + 1 \\
x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \\
\underline{2x^3 - 8x^2 + 10x - 12} \\
2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\
6x^3 - 15x^2 - 12x + 9 \quad | \quad -3x^2 + 14x - 15 = c_1 r_1(x) \\
\underline{6x^3 - 28x^2 + 30x} \quad | \quad -2x \parallel -13 \\
13x^2 - 42x + 9 \\
\underline{39x^2 - 126x + 27} \\
39x^2 - 182x + 195 \\
\underline{56x - 168} \\
3x^2 - 14x + 15 \quad | \quad x - 3 = c_2 r_2(x) \\
\underline{3x^2 - 9x} \quad | \quad 3x - 5 \\
-5x + 15 \\
\underline{-5x + 15} \\
0
\end{array}$$

Ответ.  $(f(x), \varphi(x)) = x - 3$ .

Задача 5. Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$  так, чтобы выполнялось равенство

$$f(x)M(x) + \varphi(x)N(x) = d(x), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2, \\ \varphi(x) &= 2x^3 + x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

и

$$d(x) = (f(x), \varphi(x)).$$

Решение. Применим к многочленам  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  алгоритм Евклида. Заметим, что здесь произвол, состоящий в умножении многочленов на постоянные множители, возможный при нахождении наибольшего общего делителя, допускать нельзя, так как здесь мы будем использовать и частные, которые при указанном произволе могут искажаться.

В результате деления получим:

$$f(x) = \varphi(x)q_1(x) + r_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x + 1, \quad r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3; \\ \varphi(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \end{aligned}$$

где

$$q_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad r_2(x) = 2x - 2;$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),$$

где

$$q_3(x) = -\frac{3}{2}x - 3, \quad r_3(x) = -3.$$

Так как  $r_3(x) = -3$  есть постоянное число, а на постоянное число без остатка делится любой многочлен, то следующий остаток  $r_4(x)$  будет равен нулю. Таким образом, алгоритм Евклида записался здесь в три строки, а наибольший общий делитель равен  $-3$ , или, как мы условились (см. замечание к задаче 4),  $d(x) = 1 = -\frac{1}{3}r_3(x)$ . Чтобы выразить  $d(x)$  через многочлены  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , выразим сначала через них  $r_3(x)$ . Для этого найдем  $r_3(x)$  из третьей строки алгоритма Евклида:

$$r_3(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x).$$

Подставив в это равенство вместо  $r_2(x)$  его выражение

найденное из предпоследней строки алгоритма Евклида, получим:

$$r_3(x) = r_1(x) - [\varphi(x) - r_1(x) q_2(x)] q_3(x),$$

или

$$r_3(x) = r_1(x) [1 + q_2(x) q_3(x)] - \varphi(x) q_3(x).$$

Наконец, в последнее равенство вместо  $r_1(x)$  подставим его выражение, найденное из первой строки алгоритма Евклида, и полученное равенство приведем к виду (2). Получим:

$$r_3(x) = [f(x) - \varphi(x) q_1(x)] [1 + q_2(x) q_3(x)] - \varphi(x) q_3(x) = \\ = f(x) [1 + q_2(x) q_3(x)] + \varphi(x) [-q_1(x) - q_1(x) q_2(x) q_3(x) - q_3(x)].$$

Отсюда, учитывая, что  $d(x) = \frac{r_3(x)}{-3}$ , имеем:

$$d(x) = f(x) \frac{1 + q_2(x) q_3(x)}{-3} + \varphi(x) \frac{q_1(x) + q_1(x) q_2(x) q_3(x) + q_3(x)}{3}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (2), заключаем:

$$M(x) = \frac{1 + q_2(x) q_3(x)}{-3}; \quad N(x) = \frac{q_1(x) + q_1(x) q_2(x) q_3(x) + q_3(x)}{3}.$$

После подстановки в эти равенства многочленов  $q_1(x) = x + 1$ ,  $q_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$  и  $q_3(x) = -\frac{3}{2}x - 3$ , получим:

$$M(x) = -\frac{2x^2 + 3x}{6}; \quad N(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{6}.$$

## 2. Схема Горнера

В алгебре часто приходится делить многочлен  $f(x)$  на двучлен вида  $x - a$ . В этом случае деление углом может быть записано значительно проще (сокращенно), а именно: если  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , то коэффициенты частного  $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$  и остаток  $r$  от деления  $f(x)$  на  $x - a$  могут быть найдены по схеме:

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a$	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0a + a_1$	$b_2 = b_1a + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = b_{n-2}a + a_{n-1}$	$r = b_{n-1}a + a_n$

которая называется *схемой Горнера*.

Задача 6. Пользуясь схемой Горнера, разделить с остатком многочлен

$$f(x) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$$

на двучлен: а)  $x - 2$ ; б)  $x + 3$ .

Решение. а) Здесь  $a = 2$  и коэффициенты частного  $q(x)$  и остаток  $r$  найдутся по схеме:

$$2 \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 4 & -5 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 6 & 7 & 17 & 30 & 62 & 123 \end{array}$$

Следовательно, в этом случае

$$q(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 30x + 62, \quad r = 123.$$

б) Так как  $x + 3 = x - (-3)$ , то в этом случае  $a = -3$  и схема деления запишется следующим образом:

$$-3 \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 4 & -5 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -8 & 27 & -85 & 257 & -772 \end{array}$$

Отсюда имеем:

$$\text{частное } q(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 85x + 257;$$

$$\text{остаток } r(x) = -772.$$

Задача 7. Разделить многочлен

$$f(x) = 3x^5 + ix^4 - (1-i)x^2 + 2 + i$$

на двучлен  $x - 2i + 1$ .

Решение. Так как  $x - 2i + 1 = x - (-1 + 2i)$ , то здесь  $a = -1 + 2i$ .

$$-1 + 2i \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 3 & i & 0 & -1 + i & 0 & 2 + i \\ \hline 3 & -3 + 7i & -11 - 13i & 36 - 8i & -20 + 80i & -138 - 119i \end{array}$$

Ответ. Частное  $q(x) = 3x^4 + (-3 + 7i)x^3 - (11 + 13i)x^2 + (36 - 8i)x - (20 - 80i)$ ;

$$\text{остаток } r(x) = -138 - 119i.$$

Задача 8. Пользуясь формулой Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

разложить многочлен  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 26x + 37$  по степеням двучлена  $x - 2$ .

Решение. Как видно из формулы Тейлора, для решения задачи нужно найти все производные многочлена  $f(x)$  и вычислить значения многочлена и его производных при  $x = 2$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 26x + 37, \\ f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 24x - 26, \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 24, \\ f'''(x) &= 24x - 36, \\ f^{IV}(x) &= 24. \end{aligned}$$

Отсюда находим:  $f(2) = 1$ ,  $f'(2) = -18$ ,  $f''(2) = 0$ ,  $f'''(2) = 12$ ,  $f^{IV}(2) = 24$ .

Подставляя найденные значения в формулу Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 26x + 37 &= 1 - 18(x - 2) + \\ &+ 2(x - 2)^3 + (x - 2)^4. \end{aligned}$$

Замечание. Эту задачу можно решить несколько иначе с помощью схемы Горнера. Запишем разложение многочлена  $f(x)$  по степеням  $(x - 2)$  с неопределенными коэффициентами:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - 2) + c_2(x - 2)^2 + c_3(x - 2)^3 + c_4(x - 2)^4.$$

Легко видеть, что числа  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  равны соответственно остаткам от деления многочленов  $f(x), q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)$  на  $x - 2$ , где  $q_1(x)$  есть частное от деления  $f(x)$  на  $x - 2$ , а  $q_i(x)$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) — частное от деления  $q_{i-1}(x)$  на  $x - 2$ . Все решение можно записать в таблицу:

	1	-6	12	-26	37
2	1	-4	4	-18	1
2	1	-2	0	-18	
2	1	0	0		
2	1	2			
	1				

Полученные от делений остатки 1, -18, 0, 2, 1 равны соответственно коэффициентам  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  искомого разложения.

Отсюда видно также, что с помощью схемы Горнера можно находить значение многочлена  $f(x)$  и его производных.

**Задача 9.** Найти значение многочлена  $f(x) = 2x^5 + 7x^4 - x^3 + 3x - 2$  и всех его производных при  $x = -3$  и разложить  $f(x)$  по степеням двучлена  $x + 3$ .

**Решение.** Будем делить  $f(x)$  и получающиеся при этом частные на  $x + 3$  по схеме Горнера:

	2	7	-1	0	3	-2
-3	2	1	-4	12	-33	97
	2	-5	11	-21	30	
	2	-11	44	-153		
	2	-17	95			
	2	-23				
	2					

Отсюда имеем разложение  $f(x)$  по степеням  $x + 3$ :

$$f(x) = 97 + 30(x + 3) - 153(x + 3)^2 + 95(x + 3)^3 - 23(x + 3)^4 + 2(x + 3)^5.$$

Сравнивая это разложение с формулой Тейлора (см. предыдущую задачу), получим:

$$f(-3) = 97; \quad \frac{f'(-3)}{1!} = 30; \quad \frac{f''(-3)}{2!} = -153; \quad \frac{f'''(-3)}{3!} = 95;$$

$$\frac{f^{IV}(-3)}{4!} = -23; \quad \frac{f^V(-3)}{5!} = 2.$$

Отсюда

$$f'(-3) = 30; \quad f''(-3) = -306; \quad f'''(-3) = 570;$$

$$f^{IV}(-3) = -552; \quad f^V(-3) = 240.$$

**Задача 10.** Вычислить значения многочлена

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 7$$

при  $x = 3,01$  и  $x = 2,98$ .

Решение. Вычисление значений многочлена непосредственной подстановкой вместо  $x$  соответствующих чисел здесь затруднительно. Применим разложение многочлена по степеням двучлена. Очевидно, что здесь  $f(x)$  нужно разложить по степеням  $x - 3$ . Воспользуемся схемой Горнера:

	1	5	-9	0	7
3	1	8	15	45	142
	1	11	48	189	
	1	14	90		
	1	17			
	1				

Итак, имеем:

$$f(x) = (x - 3)^4 + 17(x - 3)^3 + 90(x - 3)^2 + 189(x - 3) + 142.$$

Отсюда легко находим  $f(3,01)$  и  $f(2,98)$ :

$$f(3,01) = (0,01)^4 + 17(0,01)^3 + 90(0,01)^2 + 189(0,01) + 142 = 143,89901701.$$

$$f(2,98) = (-0,02)^4 + 17(-0,02)^3 + 90(-0,02)^2 + 189(-0,02) + 142 = 138,25586416.$$

Задача 11. Разложить по степеням  $x$  многочлен  $f(x+3)$ , где  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2$ .

Решение. Найдем сначала  $f(x+3)$ , для чего в  $f(x)$  вместо  $x$  подставим  $x+3$ :

$$f(x+3) = (x+3)^5 - 5(x+3)^4 - 4(x+3)^3 + 2.$$

Теперь, пользуясь формулой бинома Ньютона, раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} f(x+3) &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243 - 5x^4 - \\ &- 60x^3 - 270x^2 - 540x - 405 - 4x^3 - 36x^2 - 108x - 108 + 2 = \\ &= x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 36x^2 - 243x - 268. \end{aligned}$$

Эту же задачу можно решить проще, если воспользоваться формулой Тейлора и схемой Горнера.

В формулу Тейлора, приведенную в задаче 8, вместо

$x$  подставим  $x + a$ . Тогда формула примет вид:

$$f(x + a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n.$$

В нашем примере  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2$  и  $a = 3$ .

Так же, как в задаче 8, найдем коэффициенты  $f(3)$ ,  $\frac{f'(3)}{1!}$ , ...,  $\frac{f^{(5)}(3)}{5!}$ .

3	1	-5	-4	0	0	2
	1	-2	-10	-30	-90	-268
	1	1	-7	-51	-243	
	1	4	5	-36		
	1	7	26			
	1	10				
	1					
	1					

Подставляя полученные коэффициенты в формулу и записывая многочлен по возрастающим степеням  $x$ , получим:

$$f(x + 3) = x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 36x^2 - 243x - 268.$$

Задача 12. Расположить по степеням  $x$  многочлен

$$(x - 4)^4 - 3(x - 4)^3 + 2(x - 4) - 5.$$

Решение.

-4	1	-3	0	2	-5
	1	-7	28	-110	435
	1	-11	72	-398	
	1	-15	132		
	1	-19			
	1				
	1				

Ответ.  $(x - 4)^4 - 3(x - 4)^3 + 2(x - 4) - 5 = x^4 - 19x^3 + 132x^2 - 398x + 435.$

## Упражнения

1. Найти делитель, если известны делимое  $f(x)$ , неполное частное  $q(x)$  и остаток  $r(x)$ :

a)  $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$ ;  $q(x) = x^2 + 3x + 1$ ;  $r(x) = 63x + 25$ ;

b)  $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$ ;  $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 24$ ;  $r(x) = 63x + 25$ ;

с)  $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1$ ;  $q(x) = x^2 + (3-i)x - (4+3i)$ ;  $r(x) = -3(3-2i)x + 3(3+2i)$ .

2. Пользуясь алгоритмом Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , если:

a)  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ ;  $\varphi(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ;

b)  $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ ;  $\varphi(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$ ;

с)  $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ ;  $\varphi(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ ;

d)  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ ;  $\varphi(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$ .

3. Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать такие многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$ , что

$$f(x)M(x) + \varphi(x)N(x) = d(x),$$

где  $d(x)$  — наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ :

a)  $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ ;  $\varphi(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$ ;

b)  $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ ;  $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ ;

с)  $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ ;  $\varphi(x) = x^2 - x - 1$ ;

d)  $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$ ;  $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$ .

4. Пользуясь схемой Горнера, разделить многочлен  $f(x)$  на двучлен  $x - a$ , если:

a)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ ;  $a = 2$ ;

b)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ ;  $a = -1$ ;

с)  $f(x) = 3x^5$ ;  $a = 3$ ;

d)  $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7+i$ ;  $a = -i$ .

5. Разложить многочлен  $f(x)$  по степеням двучлена  $x-a$ , а также найти значение многочлена и всех его производных при  $x = a$ , если:

a)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1; a = 2;$

b)  $f(x) = 2x^5 + x^2 + 1; a = -3;$

c)  $f(x) = x^3 + 2ix - 3; a = 1;$

d)  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16; a = -2.$

6. Вычислить значение многочлена

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 6$$

при  $x = 2,95; x = 3,2; x = 4,99; x = 5,02.$

7. Разложить на простейшие дроби следующие дробные функции:

a)  $\frac{x^3 + 2x - 3}{(x + 3)^4};$  b)  $\frac{2x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^5};$  c)  $\frac{x^4 + x + 1}{(x + 5)^6}.$

Указание. Разложить числитель по степеням соответствующего двучлена  $x - a$ .

8. Расположить многочлены по степеням  $x$ :

a)  $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^3 + 5(x + 3) - 2;$

b)  $2(x - 3)^6 + 7(x - 3)^5 + (x - 3) - 5(x - 3)^2 + 4;$

c)  $(x + 1 + 2i)^4 - 3i(x + 1 + 2i)^3 - 4(x + 1 + 2i)^2 + 5i(x + 1 + 2i) - 1.$

#### § 14. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА. СВЯЗЬ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ЕГО КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть имеем многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с числовыми коэффициентами. Число  $\alpha$  называется корнем многочлена  $f(x)$ , если значение многочлена  $f(x)$  при  $x = \alpha$  равно нулю, т. е.  $f(\alpha) = 0$ .

К понятию корня многочлена можно подойти и с несколько иной точки зрения, а именно: число  $\alpha$  является корнем многочлена тогда и только тогда, когда многочлен  $f(x)$  делится на двучлен  $x - \alpha$ . Этот подход имеет то преимущество, что позволяет определить понятие кратного корня. Число  $\alpha$  называется  $k$ -кратным корнем многочлена

$f(x)$ , если  $f(x)$  делится на многочлен  $(x - \alpha)^k$ , но не делится на многочлен  $(x - \alpha)^{k+1}$ .

Задача 1. Найти значение многочлена

$$f(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 5$$

при  $x = -2$ .

Решение. Для того чтобы найти значение многочлена  $f(x)$  при  $x = -2$ , достаточно подставить в многочлен  $f(x)$  вместо  $x$  число  $-2$ :

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^6 + 3(-2)^4 + 2(-2)^3 - 9(-2)^2 + 5 = \\ &= 64 + 48 - 16 - 36 + 5 = 65. \end{aligned}$$

Однако задачу можно решить проще, используя схему Горнера. По теореме Безу значение многочлена  $f(x)$  при  $x = a$  равно остатку от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - a$ . Следовательно, чтобы найти число  $f(-2)$ , достаточно разделить  $f(x)$  на  $x - (-2) = x + 2$ . Тогда остаток от деления и будет искомым числом:

$$-2 \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 & -9 & 0 & 5 \\ \hline 1 & -2 & 7 & -12 & 15 & -30 & 65 \end{array} \right. f(-2) = 65.$$

Задача 2. Выяснить, являются ли корнями многочлена  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 3$  числа: а)  $a = 1$ ; б)  $a = 2$ .

Решение. Для решения задачи надо или найти  $f(1)$  и  $f(2)$ , или выяснить, делится ли многочлен  $f(x)$  на  $x - 1$  и  $x - 2$ . И то и другое легко сделать по схеме Горнера. Деление  $f(x)$  на  $x - 1$  и  $x - 2$  запишем с помощью одной таблицы:

	2	3	-4	2	-3
1	2	5	1	3	0
2	2	7	10	22	41

Из таблицы находим:  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 41$ , т. е.  $f(x)$  делится на  $x - 1$  и не делится на  $x - 2$ . Следовательно, 1 есть корень многочлена  $f(x)$  и

$$f(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + x + 3),$$

а 2 не является корнем многочлена  $f(x)$ .

Задача 3. Найти кратность корня  $x = 5$  многочлена

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125.$$

Решение. Нам надо найти наибольшую степень двучлена  $x - 5$ , на которую делится  $f(x)$ . Для этого естественно было бы делить  $f(x)$  на многочлены

$$x - 5, (x - 5)^2, (x - 5)^3, \dots$$

до тех пор, пока не получим отличного от нуля остатка. Однако мы поступим несколько иначе, а именно: разделим  $f(x)$  на  $x - 5$ , затем полученное при этом частное  $q_1(x)$  снова разделим на  $x - 5$  и т. д. до тех пор, пока не получим частное  $q_k(x)$ , которое на  $x - 5$  не делится. Тогда кратность корня 5 будет равна  $k$ , так как

$$f(x) = (x - 5) q_1(x) = (x - 5)^2 q_2(x) = \dots = (x - 5)^k q_k(x).$$

Весь процесс решения можно записать в виде следующей таблицы:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	0
5	1	-5	1	-5	0	
5	1	0	1	0		
5	1	5	26			

При 4-м делении получился остаток  $26 \neq 0$ . Следовательно, число 5 является трехкратным корнем многочлена  $f(x)$ , причем

$$f(x) = (x - 5)^3 (x^2 + 1).$$

Эту задачу можно решить несколько иначе. Известна теорема: число  $\alpha$  является  $k$ -кратным корнем многочлена  $f(x)$  тогда и только тогда, когда значения многочлена  $f(x)$  и всех его производных до  $k - 1$ -й включительно при  $x = \alpha$  равны нулю.

Найдем все производные многочлена  $f(x)$ :

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125,$$

$$f'(x) = 5x^4 - 60x^3 + 228x^2 - 280x + 75,$$

$$f''(x) = 20x^3 - 180x^2 + 456x - 280,$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 360x + 456,$$

$$f^{IV}(x) = 120x - 360,$$

$$f^V(x) = 120.$$

Теперь будем находить значения многочлена  $f(x)$  и его производных при  $x = 5$ . Подставляя 5 вместо  $x$  (или деля многочлены на  $x - 5$ ), получим:

$$f(5) = 0, f'(5) = 0, f''(5) = 0, f'''(5) = 156 \neq 0.$$

Следовательно, число 5 является трехкратным корнем многочлена  $f(x)$ .

**Задача 4.** Определить  $a$  и  $b$  так, чтобы многочлен  $f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 1$  имел число  $-2$  корнем не ниже 2-й кратности.

**Решение.** Число  $-2$  будет корнем многочлена  $f(x)$  не ниже 2-й кратности, если значение многочлена  $f(x)$  и его производной  $f'(x) = 5x^4 + 2ax + b$  при  $x = -2$  равны нулю. Приравнявая  $f(-2)$  и  $f'(-2)$  нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 4a - 2b &= 31, \\ -4a + b &= -80. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$a = \frac{129}{4}, b = 49.$$

Итак, многочлен  $f(x) = x^5 + \frac{129}{4}x^2 + 49x + 1$

имеет число  $-2$  корнем не ниже 2-й кратности. (Проверьте!)

**Задача 5.** Найти многочлен наименьшей степени, имеющий простые корни  $2$  и  $i$  и двукратный корень  $-1$ .

**Решение.** Эту задачу можно решить двумя способами.

**1-й способ.** Если  $a$  — корень многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $x - a$ . Следовательно, искомым многочлен должен делиться на  $x - 2$ ,  $x - i$  и на  $(x + 1)^2$ , а так как он должен иметь наименьшую степень, то

$$f(x) = (x - 2)(x - i)(x + 1)^2 = x^4 - ix^3 - 3x^2 - (2 - 3i)x + 2i.$$

**2-й способ.** Для решения задачи можно воспользоваться теоремой Виета, которая выражает коэффициенты многочлена  $f(x)$  через его корни. Так как наш многочлен

Должен иметь 4 корня, то наименьшая возможная степень его равна 4. Значит,

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

где  $a_0$  можно взять произвольно, а остальные коэффициенты следующим образом выражаются через корни  $x_1, x_2, x_3, x_4$  многочлена:

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ a_2 &= a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4), \\ a_3 &= -a_0(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4), \\ a_4 &= a_0x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Подставив вместо  $x_1, x_2, x_3, x_4$  соответственно числа 2,  $i, -1, -1$ , получим (при  $a_0 = 1$ ):

$$\begin{aligned} a_1 &= -i, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -(2 - 3i), \quad a_4 = 2i, \\ f(x) &= x^4 - ix^3 - 3x^2 - (2 - 3i)x + 2i. \end{aligned}$$

Заметим, что в этой задаче формулы Виета явились по сути дела сокращенным способом перемножения двучленов  $x - 2, x - i, x + 1, x + 1$ .

**Задача 6.** Определить  $a, b, c$  так, чтобы они были корнями многочлена

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c.$$

**Решение.** Согласно теореме Виета имеем систему уравнений относительно неизвестных  $a, b, c$ :

$$\begin{cases} a + b + c = a, \\ ab + ac + bc = b, \\ abc = c, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b + c = 0, \\ bc = b, \\ abc = c. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1.  $b = 0$ . В этом случае имеем:  $c = 0, a$  — любое число,  $f(x) = x^3 - ax^2$ .

2.  $b \neq 0$ . Тогда из первого уравнения последней системы следует, что и  $c \neq 0$ . Сократив 2-е и 3-е уравнения соответственно на  $b$  и  $c$ , получим:

$$\begin{aligned} b + c &= 0, \\ c &= 1, \\ ab &= 1. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$a = -1, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad f(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Задача 7. Найти сумму квадратов корней многочлена

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Решение. По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1.$$

Отсюда

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = a_1^2.$$

Но  $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$ . Следовательно,

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2.$$

Задача 8. Найти необходимое и достаточное условие, при котором корни многочлена  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Пусть корни  $x_1, x_2, x_3$  многочлена  $f(x)$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q$ . Тогда имеем:  $x_2 = x_1q$ ;  $x_3 = x_2q = x_1q^2$ . Подставляя в формулы Виета вместо  $x_1, x_2, x_3$  соответственно  $x_1, x_1q, x_1q^2$ , получим систему соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x_1(1 + q + q^2) &= -a, \\ x_1^2q(1 + q + q^2) &= b, \\ x_1^3q^3 &= -c. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключим из этой системы  $x_1$  и  $q$ . Если  $a \neq 0$ , то можно 2-е равенство почленно разделить на 1-е. Разделив, получим:

$$x_1q = -\frac{b}{a}.$$

А так как  $x_1^3q^3 = -c$ , то имеем соотношение между коэффициентами  $a, b, c$ :  $c = \frac{b^3}{a^3}$ , или

$$a^3c = b^3. \quad (2)$$

Если же  $a = 0$ , то из соотношений (1) следует, что и  $b = 0$  и соотношение (2) снова выполняется. Итак, если корни  $f(x)$  образуют геометрическую прогрессию, то его коэффициенты связаны соотношением (2), т. е. соотношение (2) необходимо для того, чтобы корни многочлена  $f(x)$  составляли геометрическую прогрессию.

Теперь покажем, что условие (2) достаточно, т. е. если имеет место соотношение (2), то корни многочлена  $f(x)$

образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим сначала случай  $a = 0$ . Из соотношения (2) тогда следует, что  $b = 0$  и, следовательно, многочлен  $f(x)$  имеет вид:

$$f(x) = x^3 + c.$$

Если  $c = 0$ , то корнями  $f(x)$  являются числа  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Можно считать, что они образуют геометрическую прогрессию с первым членом 0 и любым знаменателем  $q$ . Если же  $c \neq 0$ , то корнями  $f(x)$  являются три значения  $\sqrt[3]{-c}$ , которые, как известно (см. § 12, задачу 29), образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $\varepsilon_1 = \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Пусть теперь  $a \neq 0$ . Тогда при  $c = 0$  из соотношения (2) следует, что  $b = 0$ . В этом случае многочлен имеет вид:

$$f(x) = x^3 + ax^2.$$

Его корнями являются числа  $x_1 = a$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ . Можно считать, что они образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $a$  и знаменателем 0.

Наконец, рассмотрим случай:  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ . Тогда  $b \neq 0$ , и многочлен  $f(x)$  можно записать так:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \frac{b^3}{a^3}, \quad \left( \text{так как } c = \frac{b^3}{a^3} \right).$$

Корни этого многочлена совпадают с корнями уравнения

$$a^3x^3 + a^4x^2 + a^3bx + b^3 = 0,$$

или

$$(a^3x^3 + b^3) + a^3x(ax + b) = 0,$$

$$(ax + b)[a^2x^2 - (ab - a^3)x + b^2] = 0.$$

Отсюда находим корни:

$$x_1 = -\frac{b}{a}, \quad x_2, x_3 = \frac{b - a^2 \pm \sqrt{(b - a^2)^2 - 4b^2}}{2a}.$$

Легко проверить, что и в этом случае найденные корни образуют геометрическую прогрессию. Ее первый член

$$x_2 = \frac{b - a^2 + \sqrt{(b - a^2)^2 - 4b^2}}{2a} \quad \text{и} \quad \text{знаменатель} \quad q = \\ = \frac{a^2 - b + \sqrt{(b - a^2)^2 - 4b^2}}{2b}. \quad (\text{Проверьте!})$$

Таким образом, для того чтобы корни многочлена  $f(x)$  образовывали геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно выполнение соотношения  $a^3c = b^3$ .

**Задача 9.** Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий своими корнями числа  $1, i, 2 + 3i$ .

**Решение.** Известно, что если многочлен  $f(x)$  с действительными коэффициентами имеет комплексный корень  $a + bi$ , то он имеет также корень  $a - bi$ , т. е. комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены. Следовательно, корнями искомого многочлена  $f(x)$  должны быть также числа  $-i$  и  $2 - 3i$ . Отсюда находим:

$$f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = \\ = (x - 1)(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 13) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + \\ + 17x - 13.$$

**Задача 10.** Зная, что многочлен  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$  имеет корень  $-2 + i$ , найти его остальные корни.

**Решение.** Так как  $f(x)$  есть многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем  $-2 + i$  он обязан иметь корень  $-2 - i$ . Следовательно, многочлен  $f(x)$  делится на многочлен

$$(x + 2 - i)(x + 2 + i) = x^2 + 4x + 5.$$

Разделив  $f(x)$  на этот многочлен, получим:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 - x + 1).$$

Отсюда видно, что остальные корни многочлена  $f(x)$  являются корнями уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

т. е. равны числам  $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

Итак, многочлен  $f(x)$  имеет 4 корня:

$$x_1 = -2 + i, \quad x_2 = -2 - i, \quad x_3 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

**Задача 11.** Что можно сказать о корнях многочлена  $f(x) = 2x^2 - 9x + 5$ , не находя их?

**Решение.** Так как коэффициенты многочлена действительны, то сразу можно сказать, что корни или оба дей-

ствительны, или оба мнимы и сопряжены друг с другом. Найдем дискриминант  $\Delta$  многочлена:  $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 41$ . Так как  $\Delta > 0$ , то  $f(x)$  имеет два различных действительных корня. Далее, так как произведение корней равно  $5 > 0$ , то оба корня имеют один знак, а так как их сумма равна 9, то оба они положительны. Итак, многочлен  $f(x)$  имеет два различных положительных действительных корня.

### Упражнения

1. Пользуясь схемой Горнера, проверить, является ли число  $a$  корнем многочлена  $f(x)$ :

a)  $f(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 12x - 20$ ,  $a = 2$ ;  $-2$ ;

b)  $f(x) = x^6 + 7x^5 - 6x^3 + 5x - 9$ ,  $a = 3$ ;

c)  $f(x) = 2x^5 - 2x^4 + (1 - i)x^3 + 3x^2 + (2 - 2i)x + 2 + 4i$   
 $a = 1 + i$ ;

d)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 3$ ,  $a = -3$ .

2. Найти кратность ( $k$ ) корня  $a$  многочлена  $f(x)$ :

a)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ ,  $a = 2$ ;

b)  $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ ,  $a = -2$ ;

c)  $f(x) = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 65x^3 + 74x^2 - 46x + 12$ ,  $a = 1$ ;

d)  $f(x) = x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1131x^2 - 2028x + 2197$ ,  $a = 2 - 3i$ ;

e)  $f(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$ ,  $a = 1$ ;

f)  $f(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$ ,  $a = -1$ ;  
 $a = 3$ .

3. Показать, что число 1 является 5-кратным корнем многочлена

$$f(x) = x^{2n+1} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n+2} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^{n+1} - \frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2} x^n +$$

$$+ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} x^{n-1} - 1.$$

4. Определить значение буквенных коэффициентов многочлена  $f(x)$  так, чтобы число  $a$  было его корнем не ниже 2-й кратности:

$$a) f(x) = x^5 - Ax^2 - Ax + 1, \quad a = -1;$$

$$b) f(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1, \quad a = 1;$$

$$c) f(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1, \quad a = 1.$$

5. Зная, что число  $a$  есть корень многочлена  $f(x)$ , найти остальные его корни:

$$a) f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x + 2, \quad a = 1 + i;$$

$$b) f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad a = i;$$

$$c) f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 5, \quad a = 1 - 2i.$$

6. Пусть  $f(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите следующие утверждения:

а) если числа  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки, то в интервале  $(a; b)$  содержится нечетное число корней многочлена  $f(x)$ ;

д) если  $f(a)$  и  $f(b)$  — числа одного знака, то в интервале  $(a; b)$  содержится четное число корней многочлена  $f(x)$ .

7. Найти многочлен наименьшей степени, имеющий:

а) простые корни 1 и  $-1$  и двукратный корень  $1 + i$ ;

б) простой корень  $-i$  и трехкратный корень 2;

с) тройной корень 1, простые корни 2, 3 и  $1 + i$ ;

д) тройной корень  $-1$ , простые корни 3, 4;

е) двойной корень  $i$ , простой корень  $-1 - i$ ;

ф) простые корни 1, 2, 3,  $-1$ .

8. Известно, что числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  являются корнями многочлена  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ .

Найти многочлен, имеющий своими корнями числа:

$$a) -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n;$$

$$b) \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}.$$

9. Определить  $a, b, c$  так, чтобы они были корнями многочлена

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

10. Сумма двух корней многочлена

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$$

равна 1. Найти  $\lambda$ .

11. При каком значении  $\lambda$  корни уравнения  $x^3 + x^2 + 2x + \lambda = 0$  составляют геометрическую прогрессию?

12. Найти сумму кубов корней многочлена

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

13. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий:

- а) простые корни  $1$  и  $1 + 2i$ ;
- б) простой корень  $i$  и двукратный корень  $1 - i$ ;
- в) простые корни  $1$  и  $-1$  и двукратный корень  $1 + i$ ;
- г) простой корень  $-i$  и трехкратный корень  $2$ ;
- д) простые корни  $2$ ,  $3$ ,  $1 + i$  и двукратный корень  $1$ ;
- е) трехкратный корень  $2 - 3i$ ;
- ж) двукратный корень  $i$ , простой корень  $-1 - i$ .

14. Исследовать корни квадратного трехчлена  $f(x)$ , не находя их:

- а)  $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ; б)  $3x^2 + x + 6$ ; в)  $-2x^2 - 5x + 3$ .

### § 15. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ. ОТДЕЛЕНИЕ КРАТНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Обозначим через  $K$ ,  $D$  и  $R$  соответственно поля комплексных, действительных и рациональных чисел.

Задача 1. Разложить многочлен

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}$$

на неприводимые множители: а) над полем  $D$ ; б) над полем  $K$ .

Решение. а) Ясно, что многочлен 2-й степени над полем  $D$  приводим тогда и только тогда, когда он имеет действительные корни, т. е. когда его дискриминант  $\Delta$  неотрицателен. Для многочлена  $f(x)$   $\Delta = -4\sqrt{2} < 0$ . Поэтому многочлен  $x^2 + \sqrt{2}$  над полем  $D$  неприводим.

б) Над полем  $K$  наш многочлен (как и любой другой многочлен) разлагается в произведение линейных множителей. Для их нахождения достаточно найти корни многочлена. Корнями многочлена  $x^2 + \sqrt{2}$  являются числа

$x_{1,2} = \sqrt{-\sqrt{2}} = \pm i\sqrt[4]{2}$ . Следовательно,

$$x^2 + \sqrt{2} = (x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2}).$$

Это разложение многочлена  $f(x)$  можно найти проще, если воспользоваться формулой

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi). \quad (1)$$

**Задача 2.** Разложить многочлен  $f(x) = x^4 + 1$  на неприводимые множители над полями  $K$ ,  $D$  и  $R$ .

**Решение.** а) По формуле (1) имеем:  $x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i)$ . Теперь найдем корни многочленов  $x^2 + i$  и  $x^2 - i$ . Для многочлена  $x^2 + i$  корнями будут числа

$$x_{1,2} = \sqrt{-i} = \sqrt{\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{2},$$

где  $k = 0, 1$ . Отсюда

$$x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аналогично найдем корни многочлена  $x^2 - i$ :

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теперь можно записать разложение многочлена  $f(x)$  на неприводимые (линейные) множители над полем  $K$ :

$$f(x) = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \\ \times \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad (2)$$

б) Известно, что над полем действительных чисел всякий многочлен разлагается в произведение многочленов 1-й и 2-й степени. Следовательно, наш многочлен над полем  $D$  приводим. Однако линейных множителей над полем  $D$  он не имеет, ибо все его корни мнимы. Значит, над полем  $D$   $f(x)$  разлагается в произведение двух неприводимых квадратных многочленов. Искомое разложение мы получим, перемножив в разложении (2) 1-й множитель на 4-й и 2-й на 3-й (перемножаются множители, соответствующие сопряженным корням). При умножении снова удобно

воспользоваться формулой (1). Перемножим 1-й и 4-й множители:

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ & = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2 + \sqrt{2}x + 1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$$

Отсюда имеем разложение многочлена  $f(x)$  на неприводимые множители над полем  $D$ :

$$f(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

с) Покажем, что многочлен  $f(x)$  над полем  $R$  неприводим. Допустим, что  $f(x)$  можно представить в виде произведения двух многочленов с рациональными коэффициентами степени выше нуля:

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Для многочленов  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеются две возможности:

1°. один имеет 1-ю степень, другой 3-ю;

2°. оба имеют 2-ю степень.

Очевидно, любой многочлен над полем рациональных чисел можно рассматривать также и как многочлен над полем действительных чисел. В связи с этим в случае 1° многочлен  $f(x)$  обладал бы множителем 1-й степени над полем  $D$ , что невозможно. В случае 2° мы имели бы разложение  $f(x)$  на неприводимые множители 2-й степени над полем  $D$ , причем это разложение было бы отлично от разложения, полученного выше, ибо в последнем множители имеют иррациональные коэффициенты. Итак, в случае 2° мы имеем два различных разложения многочлена  $f(x)$  на неприводимые множители над полем  $D$ , что невозможно, ибо разложение многочлена на неприводимые множители над любым полем единственно. Таким образом, в обоих случаях мы приходим к противоречию. Значит, над полем  $R$  многочлен  $f(x)$  неприводим.

Задача 3. Доказать, что многочлен

$$f(x) = x^n - 2$$

при любом  $n$  неприводим над полем рациональных чисел.

Решение. Над полем комплексных чисел корнями многочлена  $f(x)$  являются корни  $n$ -й степени из 2. Обозначим их через  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Тогда над полем комплексных чисел

$$x^n - 2 = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n).$$

Допустим, что многочлен  $x^n - 2$  приводим над полем  $R$ . Тогда его можно представить в виде произведения двух многочленов выше нулевой степени с рациональными коэффициентами:

$$x^n - 2 = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Корнями многочленов  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  являются числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Пусть  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  — корни многочлена  $f_1(x)$  ( $0 < k < n$ ). Тогда

$$f_1(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_k).$$

Свободный член этого многочлена равен

$$(-1)^k \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k.$$

Найдем его модуль. Так как  $\beta_i = \sqrt[n]{2}$ , то  $|\beta_i| = \sqrt[n]{2}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . (В равенстве  $|\beta_i| = \sqrt[n]{2}$  под корнем следует понимать его арифметическое значение.) Следовательно,

$$|(-1)^k \beta_1 \dots \beta_k| = \left(\sqrt[n]{2}\right)^k = \sqrt[n]{2^k}.$$

Так как  $0 < k < n$ , то корень  $\sqrt[n]{2^k}$  не может быть рациональным числом. Следовательно, свободный член многочлена  $f_1(x)$  является иррациональным числом. Мы же допустили, что коэффициенты многочлена  $f(x)$  рациональны. Полученное противоречие и доказывает, что многочлен  $f(x) = x^n - 2$  над полем рациональных чисел неприводим.

Задача 4. Найти наибольший общий делитель многочленов:

$$f(x) = (x^2 + 5x + 6)(x^2 - 1),$$

$$\varphi(x) = (x^4 - 2)(x^2 + 2x - 3).$$

Решение. Если  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — многочлены над полем  $R$ , то для нахождения их наибольшего общего делителя достаточно разложить их на множители, неприводимые над этим полем, и перемножить множители, общие для обоих

многочленов. В нашей задаче коэффициенты многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  рациональны. Поэтому их достаточно разложить на множители, неприводимые над полем  $R$ . Так как

$$\begin{aligned}x^2 + 5x + 6 &= (x + 2)(x + 3), & x^2 - 1 &= (x + 1)(x - 1), \\x^2 + 2x - 3 &= (x + 3)(x - 1),\end{aligned}$$

а многочлен  $x^4 - 2$  неприводим над полем  $R$  (см. задачу 3), то имеем разложения многочленов  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  на неприводимые множители над полем  $R$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= (x + 2)(x + 3)(x + 1)(x - 1), \\ \varphi(x) &= (x + 3)(x - 1)(x^4 - 2).\end{aligned}$$

Отсюда находим наибольший общий делитель для  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ :

$$(f(x), \varphi(x)) = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3.$$

**Задача 5.** Найти наибольший общий делитель многочлена  $f(x) = (x + 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)$  и его производной  $f'(x)$ .

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся следующей теоремой о кратных множителях: если некоторый неприводимый над полем  $P$  многочлен  $p(x)$  является  $k$ -кратным множителем многочлена  $f(x)$  с коэффициентами из поля  $P$ , то  $p(x)$  является  $(k - 1)$ -кратным множителем производной  $f'(x)$ .

Так как коэффициенты нашего многочлена  $f(x)$  рациональны, то в качестве поля  $P$  можно взять поле  $R$  (не будет ошибки, если взять любое более широкое поле, например  $D$  или  $K$ ; только в последнем случае решение задачи может оказаться более громоздким).

Найдем каноническое разложение многочлена  $f(x)$  над полем  $R$ . Так как

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1), \quad x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

то

$$f(x) = (x + 1)^2 (x - 1)^2 (x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Множители  $x + 1$  и  $x - 1$  в  $f(x)$  входят с кратностью 2. Следовательно, в  $f'(x)$  они войдут с кратностью 1. Многочлены же  $x^2 + 1$  и  $x^2 + x + 1$  являются простыми (1-кратными) множителями  $f(x)$ , а потому в разложение  $f'(x)$  они не войдут. Значит,

$$(f(x), f'(x)) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1.$$

**Задача 6.** Отделить кратные множители многочлена

$$f(x) = x^7 - x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 4.$$

**Решение.** Отделение кратных множителей основано на сформулированной в предыдущей задаче теореме о кратных множителях. По этой теореме при переходе от  $f(x)$  к  $f'(x)$  кратность всех множителей многочлена  $f(x)$  понижается на 1. Однако у многочлена

$$f'(x) = 7x^6 - 6x^5 - 20x^4 + 9x^2 + 10x + 8$$

могут быть и такие множители, которых нет у  $f(x)$ . Чтобы избавиться от них, мы найдем наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$ . В него будут входить те и только те множители, которые входят в  $f(x)$ , однако с меньшей на 1 кратностью.

Применив алгоритм Евклида, получим:

$$d_1(x) = (f(x), f'(x)) = x^3 - 3x - 2.$$

Так как  $d_1(x)$  есть многочлен 3-й степени, разложение которого на множители в общем случае затруднительно, но который в свою очередь может иметь кратные множители, то мы применим к нему аналогичный процесс понижения кратности его множителей. Получим:

$$d_2(x) = (d_1(x), d_1'(x)) = x + 1.$$

Итак, множитель  $x + 1$  входит в  $d_2(x)$  с кратностью 1, а, следовательно, в  $d_1(x)$  он входит с кратностью 2. Разделив  $d_1(x)$  на  $(x + 1)^2$ , найдем

$$d_1(x) = (x + 1)^2(x - 2).$$

Отсюда имеем: множитель  $(x + 1)$  входит в  $f(x)$  с кратностью 3, а  $(x - 2)$  с кратностью 2. Разделив (углом)  $f(x)$  на многочлен

$$(x + 1)^3(x - 2)^2 = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4,$$

получим:

$$f(x) = (x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4)(x^2 + 1),$$

т. е.

$$f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2(x^2 + 1).$$

### Упражнения

1. Разложить многочлен  $f(x)$  на неприводимые множители над полями  $K$ ,  $D$ ,  $R$ :

а)  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ ;

- b)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ;  
 c)  $f(x) = x^6 - 1$ ;  
 d)  $f(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$ ;  
 e)  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ ;  
 f)  $f(x) = x^4 - 2$ .

2. Найти наибольший общий делитель многочленов:

- a)  $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$  и  $(x-1)^2(x+2)(x+5)$ ;  
 б)  $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$  и  $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$ ;  
 с)  $(x^3-1)(x^2-2x+1)$  и  $(x^2-1)^3$ .

3. Найти наибольший общий делитель многочлена и его производной:

- a)  $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3)$ ;  
 б)  $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ ;  
 с)  $f(x) = x^{m+n} - x^m - x^n + 1$ .

4. Доказать, что многочлен

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 4$$

неприводим над полем  $R$ .

Указания. а) Сделайте подстановку  $x = y + 1$ .

б) Докажите, что полученный многочлен  $\varphi(y)$  неприводим над полем  $R$  тогда и только тогда, когда неприводим данный многочлен.

с) Докажите неприводимость над полем  $R$  многочлена  $\varphi(y)$ .

5. Отделить кратные множители многочлена:

- a)  $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ ;  
 б)  $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ ;  
 с)  $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$ ;  
 д)  $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$ ;  
 e)  $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ;  
 ф)  $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ .

## § 16. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-й и 4-й СТЕПЕНЕЙ

Задача 1. Решить уравнение

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 13 = 0.$$

Решение. Приведем сначала наше уравнение к уравнению вида  $y^3 + py + q = 0$ , для чего произведем подста-

новку  $x = y - \frac{a_1}{3a_0} = y - \frac{6}{3 \cdot 1} = y - 2$ . (Здесь  $a_0, a_1$  — соответственно коэффициенты при  $x^3$  и  $x^2$ .) Получим:

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 6(y - 2) - 13 = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены или, пользуясь схемой Горнера, расположим левую часть этого уравнения по степеням  $y$  (см. задачу 12, § 13):

-2	1	6	6	-13
	1	4	-2	-9
	1	2	-6	
	1	0		
	1			

Итак, имеем:  $y^3 - 6y - 9 = 0$ ; причем  $x = y - 2$ .

Для корней кубического уравнения  $y^3 + py + q = 0$  имеется так называемая формула Кардано:

$$y_i = u_i + v_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $u_1, u_2, u_3$  — значения радикала  $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

и  $v_i = -\frac{p}{3u_i}$ .

Практически корни  $y_1, y_2, y_3$  находятся проще. Пусть  $u_1$  — одно (любое) значение радикала  $u$ . Тогда, как известно, два других значения можно найти следующим образом:  $u_2 = u_1 \epsilon_1$ ;  $u_3 = u_1 \epsilon_2$ , где

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

корни 3-й степени из 1. Если положить  $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ , то получим:  $v_2 = v_1 \epsilon_2$ ,  $v_3 = v_1 \epsilon_1$ . (Проверьте!) Подставляя полученные значения  $u_i, v_i$  в формулу  $y_i = u_i + v_i$ , найдем практические формулы:

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1).$$

В нашем случае

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{8}.$$

Одно из значений этого радикала равно 2. Поэтому положим  $u_1 = 2$ . Тогда  $v_1 = -\frac{p}{3u_1} = 1$  и

$$y_1 = 3,$$

$$y_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$y_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Отсюда, учитывая, что  $x = y - 2$ , получим:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_3 = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Задача 2. Решить уравнение

$$x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Решение. Здесь  $p = -6$ ,  $q = 4$ . Следовательно,

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

Для извлечения корня 3-й степени из числа  $-2 + 2i$  представим последнее в тригонометрической форме. Получим:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-2 + 2i} &= \sqrt[3]{\sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \\ &= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi + 8\pi k}{12} + i \sin \frac{3\pi + 8\pi k}{12} \right), \end{aligned}$$

где  $k = 0, 1, 2$ .

При  $k = 0$  имеем:

$$u_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i,$$

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = \frac{6}{3(1+i)} = 1 - i.$$

Следовательно,

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -1 - \sqrt{3}i,$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) = -1 + \sqrt{3}i.$$

Задача 3. Решить уравнение

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 7 + 6i = 0.$$

Решение. Положив  $x = y + 1$ , получим уравнение относительно неизвестного  $y$ :

$$y^3 + 6y + 6i = 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3i + \sqrt{-9 + 8}} = \\ = \sqrt[3]{-2i}.$$

Непосредственно замечаем, что  $(i\sqrt[3]{2})^3 = -2i$ . Следовательно, число  $i\sqrt[3]{2}$  является одним из значений корня  $\sqrt[3]{-2i}$  (то же самое получим, если применим формулу извлечения корня  $n$ -й степени из комплексного числа). Итак,

$$u = i\sqrt[3]{2} \quad \text{и} \quad v = -\frac{2}{i\sqrt[3]{2}} = i\sqrt[3]{4}.$$

$$y_1 = i(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}),$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(i\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(i\sqrt[3]{2} - i\sqrt[3]{4}) = \\ = \frac{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}i,$$

$$y_3 = \frac{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}i.$$

Отсюда находим корни данного уравнения:

$$x_1 = 1 + i(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}),$$

$$x_2 = \frac{2 + (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}i,$$

$$x_3 = \frac{2 + (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}i.$$

Задача 4. Не решая следующих уравнений, определить число действительных корней каждого из них:

- а)  $x^3 + 3x - 5 = 0$ ;
- б)  $x^3 - 5x + 1 = 0$ ;
- в)  $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$ .

Решение. Если коэффициенты  $p$  и  $q$  уравнения  $x^3 + px + q = 0$  действительны, то число действительных корней этого уравнения вполне определяется знаком числа

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2,$$

называемого дискриминантом многочлена  $x^3 + px + q$ .

В нашем случае:

- а)  $\Delta < 0$ , один корень действительный, два мнимых.
- б)  $\Delta > 0$ , все три корня действительны.
- в)  $\Delta = 0$ , все три корня действительны, из них два равных.

Задача 5. Решить уравнение

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0.$$

Решение. Для решения уравнений 4-й степени существует несколько способов. Применим так называемый способ Феррари. Оставим в левой части уравнения члены с  $x^4$  и  $x^3$  и дополним ее до полного квадрата:

$$x^4 - x^3 + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 - 5x + 10,$$

или

$$\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - 5x + 10.$$

Теперь прибавим к обеим частям члены с новым неизвестным  $y$  так, чтобы левая часть снова стала квадратом (независимо от значения  $y$ ):

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} &= \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} + \\ &+ \frac{13}{4}x^2 - 5x + 10, \end{aligned}$$

или

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{13}{4}\right)x^2 - \left(\frac{y}{2} + 5\right)x + \frac{y^2}{4} + 10. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты перед степенями  $x$  в правой части зависят от неопределенной величины  $y$ . Подберем значение  $y$  так, чтобы правая часть стала квадратом. Для этого необходимо, чтобы дискриминант квадратного (относительно  $x$ ) трехчлена в правой части равнялся нулю. Приравняв этот дискриминант к нулю, получим уравнение 3-й степени относительно  $y$ :

$$\left(\frac{y}{2} + 5\right)^2 - 4\left(y + \frac{13}{4}\right)\left(\frac{y^2}{4} + 10\right) = 0,$$

или

$$y^3 + 3y^2 + 35y + 105 = 0.$$

Это уравнение, вообще говоря, можно решить по формуле Кардано. Однако нам достаточно знать лишь один его корень, который в этом случае можно найти проще, разложив левую часть уравнения на множители:

$$y^3 + 3y^2 + 35y + 105 = y^2(y+3) + 35(y+3) = (y^2 + 35)(y+3).$$

Отсюда имеем корень  $y_1 = -3$ . Подставив это значение в уравнение (1), получим:

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{4},$$

или

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей полученного уравнения квадратный корень, получим два квадратных уравнения:

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - \frac{7}{2} \quad \text{и} \quad x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2},$$

или

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 5 = 0.$$

Решив их, найдем 4 корня нашего уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{5}.$$

## Упражнения

1. Решить уравнения:

a)  $x^3 - 9x^2 + 18x - 28 = 0$ ;

b)  $x^3 + 6x + 2 = 0$ ;

c)  $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$ ;

d)  $x^3 - (4 - i)x^2 + 4(1 - i)x + 4i = 0$ .

2. Определить число действительных корней для уравнений:

a)  $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$ ;

b)  $x^3 - 6x^2 + 7x + 5 = 0$ ;

c)  $x^3 - 12x^2 + 45x + 54 = 0$ .

3. Решить уравнения методом Феррари:

a)  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ ;

b)  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$ ;

c)  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$ .

4. Составьте произвольно уравнение 4-й степени и решите его методом Феррари.

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет кратные корни:

a)  $x^3 + 3x + a = 0$ ;

b)  $x^3 + ax + 6 = 0$ ;

c)  $x^3 + ax + a = 0$ .

## § 17. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Задача 1. Найти границы действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 5x - 3.$$

Решение. Найти границы действительных корней многочлена  $f(x)$  — значит найти такие два числа  $M_1$  и  $M_2$ , что для любого действительного корня  $\lambda$  многочлена  $f(x)$  выполняются неравенства

$$M_1 < \lambda < M_2.$$

При этом  $M_1$  называют нижней границей (НГ), а  $M_2$  — верхней границей (ВГ) действительных корней многочлена  $f(x)$ . Для нахождения НГ и ВГ существует несколько способов. Решим нашу задачу двумя способами.

Первый способ.

$$ВГ = 1 + \frac{A}{|a_0|}, \quad НГ = -\left(1 + \frac{A}{|a_0|}\right),$$

где  $A$  — наибольшая из абсолютных величин коэффициентов, а  $a_0$  — старший коэффициент многочлена  $f(x)$ . Подставляя значения этих величин:  $A = 10$  и  $a_0 = 1$ , получим:

$$ВГ = 11, \quad НГ = -11,$$

т. е. действительные корни многочлена  $f(x)$  заключены в промежутке  $(-11; 11)$ .

Второй способ.  $ВГ = 1 + \sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$ , где  $m$  — индекс первого отрицательного коэффициента многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

а  $B$  — наибольшая из абсолютных величин его отрицательных коэффициентов. (Этот способ применим лишь тогда, когда  $a_0 > 0$ .)

В нашем примере  $m = 4$ ,  $B = 5$ ,  $a_0 = 1$ . Значит,  $ВГ = 1 + \sqrt[4]{5} < 3$ .

Для нахождения НГ этим способом достаточно в  $f(x)$  вместо  $x$  подставить  $-x$  и воспользоваться следующим правилом: нижняя граница действительных корней многочлена  $f(x)$  равна верхней границе действительных корней многочлена  $f(-x)$ , взятой с противоположным знаком (Выведите это правило!) В нашем случае

$$f(-x) = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 5x - 3.$$

Так как здесь  $a_0 < 0$ , то умножим  $f(-x)$  на  $-1$ . Очевидно, что от этого корни многочлена  $f(-x)$  не изменятся и, следовательно, не изменятся границы корней.

$$-f(-x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x + 3.$$

Теперь имеем:  $a_0 = 1$ ,  $m = 1$ ,  $B = 5$  и  $ВГ = 1 + 5 = 6$  (под корнем 1-й степени из числа следует понимать само это число). Следовательно, для данного многочлена  $f(x)$  НГ =  $-6$ . Итак, корни многочлена  $f(x)$  заключены в интервале  $(-6; 3)$ .

**З а м е ч а н и е.** Сравнивая рассмотренные способы, можно сказать, что второй способ несколько сложнее первого. Однако он зачастую позволяет значительно сузить границы корней, найденные первым способом. На практике же очень

важно иметь более узкие границы корней. Поэтому мы будем в основном пользоваться лишь вторым способом.

**Задача 2.** Найти границы действительных корней многочлена  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x^6 - x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4$ ;

б)  $f(x) = 2x^6 - 8x^3 + 15x^2 + 16x - 7$ .

**Решение.** а) Применим формулу

$$ВГ = 1 + \sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}. \quad (1)$$

Подставляя значения  $m = 1$ ,  $B = 5$ ,  $a_0 = 2$ , получим:  $ВГ = 1 + \frac{5}{2} = 3,5$ . Для нахождения НГ делаем подстановку  $-x$  вместо  $x$ :

$$f(-x) = 2x^6 + x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4.$$

Замечаем, что все коэффициенты многочлена  $f(-x)$  положительны. В этом случае формула (1) не применима, ибо не существует индекса первого отрицательного коэффициента. Однако в этом случае в применении какой-либо формулы нет никакой необходимости, ибо ясно, что многочлен, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней (если  $a > 0$ , то  $f(a) > 0$ ), и, следовательно,  $ВГ = 0$ . Отсюда следует, что для многочлена  $f(x)$  НГ = 0. Итак, действительные корни многочлена  $f(x)$  заключены в промежутке  $(0; 3,5)$ .

б) Применяя формулу (1), получим:

$$ВГ = 1 + \sqrt[3]{4} < 3.$$

Далее,  $f(-x) = 2x^6 + 8x^3 + 15x^2 - 16x - 7$ . Здесь снова, как и в случае а), можно обойтись без формулы. Глядя на коэффициенты многочлена, легко заметить, что  $f(x) > 0$  при  $x \geq 1$ . Следовательно,  $ВГ = 1$  для  $f(-x)$  и действительные корни многочлена  $f(x)$  находятся в интервале  $(-1; 3)$ .

**Задача 3.** Пользуясь теоремой Штурма, отделить действительные корни многочлена

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1.$$

**Решение.** Отделить корни многочлена — это значит найти такие промежутки, в каждом из которых находится по одному действительному корню данного многочлена.

Найдем сначала верхнюю и нижнюю границы действительных корней  $f(x)$ . Применяя формулу  $ВГ = 1 + \sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$ , находим, что корни многочлена  $f(x)$  заключены в промежутке  $(-4; 8)$ .

Теперь для многочлена  $f(x)$  составим систему (многочленов) Штурма. Первым и вторым многочленом этой системы будут служить соответственно сам многочлен  $f(x)$  и его производная

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 14x + 8 = 2(2x^3 - 3x^2 - 7x + 4).$$

Для отыскания третьего многочлена разделим с остатком  $f(x)$  на  $f'(x)$ . Так как в дальнейшем нас будут интересовать лишь знаки значений многочленов Штурма, то сами многочлены, а также все промежуточные многочлены в процессе деления можно умножать на любые *положительные* числа. Учитывая это, мы во избежание дробных коэффициентов будем делить  $2f(x)$  на  $\frac{1}{2}f'(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 2 & 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4 \\ 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 4x & x \parallel -1 \\ \hline -x^3 - 7x^2 + 12x + 2 & \\ \hline -2x^3 - 14x^2 + 24x + 4 & \\ -2x^3 + 3x^2 + 7x - 4 & \\ \hline -17x^2 + 17x + 8 & \end{array}$$

Обозначим полученный «остаток» от деления через  $r_1(x)$ . Тогда искомым многочлен Штурма  $f_1(x)$  будет равен  $-r_1(x)$ , т. е.

$$f_1(x) = 17x^2 - 17x - 8.$$

Для отыскания следующего многочлена Штурма разделим  $\frac{17}{2}f'(x)$  на  $f_1(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} 34x^3 - 51x^2 - 119x + 68 & 17x^2 - 17x - 8 \\ 34x^3 - 34x^2 - 16x & 2x - 1 \\ \hline -17x^2 - 103x + 68 & \\ -17x^2 - 17x + 8 & \\ \hline -86x + 60 & \\ \hline -43x + 30 & \end{array}$$

Следовательно,  $f_2(x) = 43x - 30$ . Разделим теперь  $43f_1(x)$  на  $f_2(x)$ :

$$\begin{array}{r|l} 731x^2 - 731x - 344 & 43x - 30 \\ \hline 731x^2 - 510x & 17x - \frac{221}{43} \\ \hline -221x - 344 & \\ -221x + \frac{6630}{43} & \\ \hline & C < 0 \end{array}$$

Получим остаток  $C = -344 - \frac{6630}{43}$ , который, очевидно, отрицателен (его абсолютная величина нас не интересует). Поэтому будем считать, что  $f_3(x) = 1$ .

Итак, имеем следующую систему Штурма:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1, \\ f'(x) &= 2(2x^3 - 3x^2 - 7x + 4) \quad (\text{множитель } 2 \text{ можно было бы опустить}), \end{aligned}$$

$$f_1(x) = 17x^2 - 17x - 8,$$

$$f_2(x) = 43x - 30,$$

$$f_3(x) = 1.$$

Сравнивая процесс нахождения этих многочленов с алгоритмом Евклида, можно заключить, что  $(f(x), f'(x)) = 1$ . Следовательно, условие теоремы Штурма выполнено.

Пользуясь теоремой Штурма, найдем число всех действительных корней нашего многочлена, а также число его положительных и число его отрицательных корней. Результаты вычислений запишем в таблицу:

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков	Число потерь перемен знаков
-4	+	-	+	-	+	4	} 2
0	+	+	-	-	+	2	
8	+	+	+	+	+	0	

Из таблицы видно, что при возрастании  $x$  от  $-4$  до  $8$  потеряно четыре переменных знаков ( $4 - 0 = 4$ ). Следовательно, наш многочлен имеет четыре действительных корня. Кроме того, замечаем, что две потери переменных знаков происходят при переходе от  $-4$  к  $0$  и две при переходе от  $0$

к 8. Следовательно, два корня отрицательны и два положительны. Так как все 4 корня находятся в промежутке  $(-4; 8)$ , то будем отделять их, придавая  $x$  значения  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , пока не найдем промежутки для всех четырех корней.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перемен знаков	Число потерь перемен знаков
-3	+	-	+	-	+	4	}
-2	-	-	+	-	+	3	
-1	-	+	+	-	+	3	}
0	+	+	-	-	+	2	
1	+	-	-	+	+	2	}
2	-	-	+	+	+	1	
3	-	+	+	+	+	1	}
4	+	+	+	+	+	0	

Из таблицы видно, что корни нашего многочлена находятся в промежутках:

$$(-3; -2), (-1; 0), (1; 2), (3; 4).$$

**Замечание.** Заметим, что при решении этой задачи мы проделали много лишней работы, вычисляя значения всех многочленов системы Штурма. Здесь, как и во многих других случаях, достаточно было вычислить лишь значения самого многочлена  $f(x)$ , учитывая, что если числа  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки, то в промежутке  $(a; b)$  существует нечетное число действительных корней, и если  $f(a)$  и  $f(b)$  — числа одного знака, то в промежутке  $(a; b)$  или не содержится ни одного корня, или содержится четное число корней.

Исходя из этого, при решении задачи на отделение корней можно поступать следующим образом. Сначала найти целочисленные границы корней  $(a; b)$ , затем найти знаки чисел

$$f(a), f(a+1), f(a+2), \dots, f(b)$$

и выписать те промежутки  $(k; k+1)$ , для которых числа  $f(k)$  и  $f(k+1)$  имеют разные знаки. В каждом из этих промежутков находится хотя бы по одному действитель-

ному корню. Однако следует помнить, что при этом мы можем пропустить интервалы, в которых находится четное число корней, а также ошибочно заключить, что в промежутке  $(k; k + 1)$  находится один действительный корень, тогда как на самом деле там может быть 3, 5, 7 и т. д. корней. Для того чтобы избежать подобных ошибок, надо предварительно методом Штурма найти число всех действительных корней многочлена. Полезно также найти отдельно число положительных и отрицательных корней. Так, в нашей задаче в концах интервала  $(-3; -2)$  многочлен  $f(x)$  принимает значения разных знаков [ $f(-3) > 0$ ,  $f(-2) < 0$ ]. Следовательно, в интервале  $(-3; -2)$  имеется хотя бы один действительный корень. То же самое можно сказать об интервалах  $(-1; 0)$ ;  $(1; 2)$ ;  $(3; 4)$ . Поскольку общее число действительных корней многочлена  $f(x)$  равно четырем, то в каждом из промежутков  $(-3; -2)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(3; 4)$  заключается ровно по одному корню.

**Задача 4.** Отделить действительные корни многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2.$$

**Решение.** Отыскивая границы корней, получим: действительные корни многочлена  $f(x)$  содержатся в промежутке  $(-4; 5)$ . Составим систему Штурма:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2, \\ f'(x) &= 5(x^4 - 3x^2 - 4x), \\ f_1(x) &= x^3 + 3x^2 - 1, \\ f_2(x) &= -2x^2 + x + 1, \\ f_3(x) &= -3x - 1, \\ f_4(x) &= -1. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Штурма, найдем число действительных корней многочлена  $f(x)$ . Предварительно заметим, что поскольку в интервале  $(5; +\infty)$  действительных корней нет, то число перемен знаков в системе Штурма при  $x=5$  будет тем же самым, что и при любом другом значении  $x > 5$ . Поэтому вместо 5 можно подставлять любое как угодно большое число. Это бывает полезным, ибо по лемме о модуле старшего члена при достаточно большом значении  $x$  знак многочлена  $f(x)$  совпадает со знаком его старшего члена. Мы будем вместо 5 условно писать  $+\infty$ . Аналогично, вместо  $-4$  будем писать  $-\infty$ .

Результаты вычислений запишем в таблицу:

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Число переменных знаков	Число потерь переменных знаков
$-\infty$	-	+	-	-	+	-	4	}
0	+	0	-	+	-	-	3	
$+\infty$	+	+	+	-	-	-	1	} 2

Из таблицы видно, что многочлен  $f(x)$  имеет 1 отрицательный и 2 положительных корня. Для их отделения будем вычислять значения многочлена  $f(x)$  при целых значениях  $x$  из промежутка  $(-4; 5)$ . При этом вычисление удобнее начинать с  $x = 0$ :

$$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) < 0, f(3) > 0.$$

Дальше для положительных значений  $x$  вычислять  $f(x)$  не следует, ибо уже из имеющихся данных видно, что положительные корни (а их всего два) находятся в интервалах  $(0; 1)$  и  $(2; 3)$ . Теперь будем придавать  $x$  отрицательные значения:  $f(-1) < 0$ . Учитывая, что  $f(0) > 0$ , заключаем: в промежутке  $(-1; 0)$  имеется действительный (отрицательный) корень. А так как многочлен имеет лишь один отрицательный корень, то на этом работа заканчивается. Итак, корни многочлена  $f(x)$  заключены в интервалах  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(2; 3)$ .

**Задача 5.** Отделить действительные корни многочлена

$$f(x) = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1.$$

**Решение.** Сначала устанавливаем, что корни многочлена  $f(x)$  находятся в промежутке  $(-3; 3)$ .

Далее составляем систему Штурма:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1, \\ f'(x) &= 8(2x^3 - 3x + 1), \\ f_1(x) &= 6x^2 - 6x + 1, \\ f_2(x) &= 2x - 1, \\ f_3(x) &= 1. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Штурма, находим число положительных и отрицательных корней.

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число переменных знаков	Число потерь переменных знаков	
$-\infty$	+	-	+	-	+	4	}	
0	-	+	+	-	+	3		1
$+\infty$	+	+	+	+	+	0	}	3

Из таблицы видно, что многочлен  $f(x)$  имеет 1 ( $4-3=1$ ) отрицательный и 3 положительных корня. Находим значения многочлена  $f(x)$ :

$$f(-3) > 0, f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) < 0, \\ f(1) < 0, f(2) > 0, f(3) > 0.$$

Замечаем, что в промежутках  $(-2; -1)$ ,  $(1; 2)$  имеется по крайней мере по одному корню. А так как всего действительных корней 4, то возможны случаи: или в каком-либо из указанных промежутков имеется три корня, или в каком-либо ином промежутке имеется два корня. Для выяснения полной картины здесь необходимо для значений  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  вычислять не только значения  $f(x)$ , но и значения всех остальных многочленов системы Штурма. Результаты запишем в таблицу:

$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число переменных знаков	Число потерь переменных знаков	
$-\infty$	+	-	+	-	+	4	}	
-3	+	-	+	-	+	4		
-2	+	-	+	-	+	4		
-1	-	+	+	-	+	3		
0	-	+	+	-	+	3		
1	-	0	+	+	+	1	}	2
2	+	+	+	+	+	0	}	1

Из таблицы видно, что корни находятся в промежутках  $(-2; -1)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 2)$ , причем в промежутке  $(0; 1)$  находятся два корня. Чтобы отделить их, разделим промежуток  $(0; 1)$  на два интервала  $(0; \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}; 1)$  и найдем

знак числа  $f(\frac{1}{2})$ :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2^4} - 12 \cdot \frac{1}{2^2} + 8 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - 3 + 4 - 1 > 0.$$

А так как  $f(0) < 0$  и  $f(1) < 0$ , то в каждом из промежутков  $(0; \frac{1}{2})$  и  $(\frac{1}{2}; 1)$  находится по одному корню.

Таким образом, корни нашего многочлена содержатся в промежутках:

$$(-2; -1), (0; \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}; 1), (1; 2).$$

Задача 6. Вычислить с точностью до 0,0001 корень многочлена

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x - 9$$

из промежутка  $(1; 2)$ .

Решение. Для приближенного вычисления действительных корней многочлена существует много различных методов. Одним из наиболее простых и распространенных методов является *метод Ньютона* (или *касательных*), который обычно применяется совместно с *методом линейной интерполяции* (или *хорд*). Эти методы позволяют постепенно приближаться к корню с двух сторон (слева и справа). Применим методы хорд и касательных к решению нашей задачи.

Для наглядности построим примерный график многочлена на участке  $(1; 2)$ . Первая производная  $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 9 = 4x^3 + 9(x^2 - 1)$  в промежутке  $(1; 2)$  принимает лишь положительные значения. Значит, многочлен  $f(x)$  в промежутке  $(1; 2)$  возрастает от  $f(1) = -14$  до  $f(2) = 13$ . Кроме того, вторая производная  $f''(x) = 12x^2 + 18x$  в интервале  $(1; 2)$  также положительна. Следовательно, график функции  $f(x)$  в этом интервале является вогнутой кривой. Учитывая отмеченные факты, имеем примерный (весьма грубый) график многочлена  $f(x)$  на отрезке  $(1; 2)$  (рис. 6).

Из чертежа видно, что, проведя хорду  $AB$ , мы получим приближение  $b_1$  к корню  $x_1$  слева. Чтобы приблизиться к корню справа, нужно провести касательную к кривой. Однако здесь очень важно, через какую точку ( $A$  или  $B$ ) ее проводить.

При проведении касательной следует пользоваться правилом: касательную к кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , следует проводить в той точке ( $A$  или  $B$ ), в которой значения многочлена  $f(x)$  и его второй производной имеют одинаковые знаки. При несоблюдении этого правила вместо

приближения к корню можно получить удаление от него.

В нашем случае имеем:  $f(1) < 0$ ,  $f(2) > 0$ ,  $f''(1) > 0$ ,  $f''(2) > 0$ . Отсюда видно, что  $f(x)$  и  $f''(x)$  имеют одинаковые знаки при  $x = 2$ . Следовательно, касательную следует проводить через точку  $A$ .

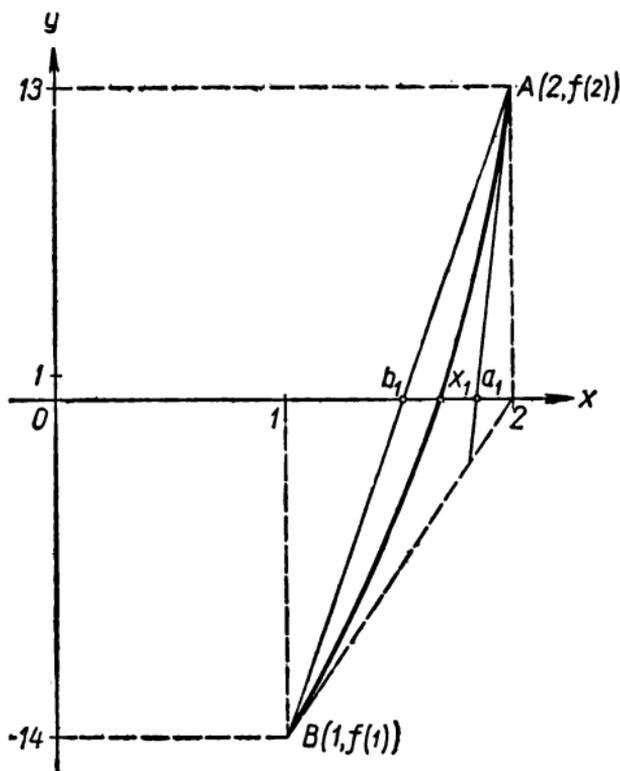


Рис. 6.

Теперь, отыскивая абсциссы  $a_1$  и  $b_1$ , получим:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{и} \quad b_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},$$

где  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Отсюда имеем:

$$a_1 = 2 - \frac{13}{59} \approx 1,77, \quad b_1 = 2 - \frac{(-1)13}{-14-13} \approx 1,51.$$

Так как верхнюю границу всегда следует брать с избытком, а нижнюю с недостатком, то положим  $a_1 = 1,8$ ;  $b_1 = 1,5$ .

Теперь, применяя те же рассуждения относительно точек  $A_1(1,8; f(1,8))$  и  $B_1(1,5; f(1,5))$ , получим новые приближения к корню:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \quad \text{и} \quad b_2 = a_1 - \frac{(b_1 - a_1)f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}.$$

Подставляя сюда вместо  $a_1$  и  $b_1$  соответственно числа 1,8 и 1,5 и округляя полученный результат, найдем:

$$a_2 = 1,74; \quad b_2 = 1,71.$$

Поскольку нам нужно вычислить корень с точностью до 0,0001, а полученные результаты для  $a_2$  и  $b_2$  совпадают лишь в цифре десятых долей, то нужно находить новые приближения  $a_3$  и  $b_3$ :

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} \approx 1,7321; \quad b_3 = a_2 - \frac{(b_2 - a_2)f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} \approx 1,7319.$$

Отсюда можно заключить, что

$$x_1 \approx 1,7320 (\pm 0,0001).$$

**Замечания.** 1. При приближенном вычислении действительных корней методом касательных и хорд в качестве подсобного средства, облегчающего вычисления, могут быть использованы «Таблицы значений многочленов» Иванова К. П.

2. Иногда бывает полезно цифру десятых долей корня вычислить методом Руффини — Горнера, а затем уточнять корень методом касательных и хорд.

### Упражнения

1. Найти границы действительных корней многочлена, применяя способы, рассмотренные в задаче 1:

- $x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3;$
- $x^5 + 7x^3 - 3;$
- $5x^4 - 10x^3 - 8x^2 + 21x + 7;$
- $3x^6 + 5x^3 - 7x^2 - 15x + 20;$
- $x^7 - 108x^5 - 445x^3 + 900x^2 + 801;$
- $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x - 14;$
- $2x^5 + 3x^3 - 7x + 12.$

2. Составить систему Штурма и отделить действительные корни многочлена  $f(x)$ :

- $f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x + 9;$
- $f(x) = x^4 - x - 1;$
- $f(x) = x^4 + x^2 - 1;$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x - 1;$

- e)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ;  
 f)  $f(x) = x^4 - x^3 - 2x + 1$ ;  
 g)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 8$ ;  
 h)  $f(x) = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1$ ;  
 i)  $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ ;  
 k)  $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 10x - 3$ .

3. Вычислить действительный корень  $x_1$  многочлена  $f(x)$  из указанного промежутка с точностью до 0,001.

- a)  $f(x) = x^3 - 10x - 5$ ;  $3 < x_1 < 4$ ;  
 b)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4$ ;  $-1 < x_1 < 0$ ;  
 c)  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 3$ ;  $0 < x_1 < 1$ ;  
 d)  $f(x) = x^4 - 10x^2 - 16x + 5$ ;  $0 < x_1 < 1$ ;  
 e)  $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 10x - 10$ ;  $-4 < x_1 < -3$ ;  
 f)  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 8$ ;  $1 < x_1 < 2$ ;  
 g)  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$ ;  $-3 < x_1 < -2$ ;  
 h)  $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 - 8x - 6$ ;  $3 < x_1 < 4$ ;  
 i)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2$ ;  $1 < x_1 < 2$ .

4. Вычислить с точностью до 0,001 действительные корни многочленов:

- a)  $x^4 + 3x^3 - 4x - 1$ ;  
 b)  $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x + 1$ ;  
 c)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 1$ ;  
 d)  $x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3$ ;  
 e)  $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x - 1$ ;  
 f)  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$ .

## § 18. ОТЫСКИВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Задача 1. Отыскать рациональные корни многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30.$$

**Решение.** Известно, что если многочлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами имеет старший коэффициент 1, то он дробных рациональных корней не имеет. Следовательно, все его рациональные корни должны быть целыми числами. Известно также, что целые корни многочлена с целыми коэффициентами находятся среди делителей свободного члена. В нашем случае делителями свободного члена (30) являются следующие числа:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30.$$

Теперь можно было бы каждое из этих 16 чисел проверить подстановкой в многочлен или по схеме Горнера. Однако многие из этих чисел можно «отсеять» более простым путем. Найдем границы действительных корней данного многочлена (см. задачу 1, § 17):  $ВГ_x = 1 + \sqrt{11} < 5$ ;  $НГ_x = -12$ . Следовательно, действительные и, в частности, рациональные корни данного многочлена содержатся в промежутке  $(-12; 5)$ .

Поэтому остается проверить следующие 9 чисел:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, -5, -6, -10.$$

Вспользуемся еще тем, что если  $\alpha \neq \pm 1$  — целый корень многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то числа  $\frac{f(1)}{\alpha-1}$  и  $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$  — целые.

В нашем случае  $f(1) = 16$ ;  $f(-1) = 24$ . Отсюда видно, что 1 и  $-1$  не являются корнями  $f(x)$ . Теперь проверим, для каких из оставшихся семи чисел  $\alpha$  числа  $\frac{16}{\alpha-1}$  и  $\frac{24}{\alpha+1}$  являются целыми. Результаты вычислений запишем в виде таблицы:

$\alpha$	2	-2	3	-3	-5	-6	-10
$\frac{16}{\alpha-1}$	ц	д	ц	ц	д	д	д
$\frac{24}{\alpha+1}$	ц		ц	ц			

(Здесь буквы ц и д означают соответственно целым или дробным является число  $\frac{16}{\alpha-1}$  или  $\frac{24}{\alpha+1}$ .) Из таблицы видно, что корни данного многочлена следует искать среди чисел 2, 3,  $-3$ .

Теперь, пользуясь схемой Горнера, проверим, будет ли каждое из этих чисел корнем многочлена.

	1	1	-11	-5	30
2	1	3	-5	-15	0

Так как остаток от деления  $f(x)$  на  $x-2$  оказался равным нулю, то  $2$  — корень  $f(x)$ . Проверим, не является ли  $2$  двукратным корнем, для чего полученное от деления частное

$$q(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 15$$

снова разделим на  $x-2$ :

	1	3	-5	-15
2	1	5	5	-5

Здесь остаток равен  $-5 \neq 0$ ; следовательно, число  $2$  является простым корнем многочлена  $f(x)$ . Теперь проверим число  $3$ . Здесь можно на  $x-3$  делить не  $f(x)$ , а  $q(x)$ :

	1	3	-5	-15
3	1	6	13	24

Из таблицы видно, что  $q(3) = 24 \neq 0$ . Следовательно, число  $3$  не является корнем  $q(x)$ , а значит, и  $f(x)$ . Осталось проверить число  $-3$ .

	1	3	-5	-15
-3	1	0	-5	0

Число  $-3$  — корень многочлена  $q(x)$ , а следовательно, и многочлена  $f(x)$ . При этом свободный член частного  $q_1(x) = x^2 - 5$  не делится на  $-3$  и, значит,  $-3$  его корнем не является, т. е.  $-3$  есть простой корень данного многочлена.

Итак, многочлен  $f(x)$  имеет два рациональных корня:  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -3$ , причем

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x^2-5).$$

Теперь можно найти и два остальных корня  $f(x)$ :  $x_{3,4} = \pm \sqrt{5}$ . Они иррациональны.

Задача 2. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x) = 4x^5 + 12x^4 + x^3 + 6x^2 + 10x + 3.$$

Решение. Здесь старший коэффициент  $f(x)$  отличен от 1. Следовательно, многочлен может иметь как целые, так и дробные рациональные корни (хотя с тем же успехом может и не иметь ни тех, ни других). Их отыскание можно свести к отысканию целых корней некоторого нового многочлена, который получается из  $f(x)$  следующим образом. Умножим многочлен  $f(x)$  на  $2^3 = 8$  и сделаем подстановку  $2x = y$ . Получим многочлен

$$\varphi(y) = y^5 + 6y^4 + y^3 + 12y^2 + 40y + 24,$$

который не имеет дробных корней. Найдя его целые корни (тем же способом, что и в предыдущей задаче) и разделив их на 2 (так как  $x = \frac{y}{2}$ ), получим все рациональные корни данного многочлена.

Однако такое сведение не обязательно. Можно найти сразу все рациональные корни данного многочлена, если воспользоваться следующей теоремой. Если дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то  $p$  является делителем свободного члена, а  $q$  — делителем старшего коэффициента многочлена  $f(x)$ . Следовательно, корни нашего многочлена следует искать среди чисел

$$\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{3}{4}.$$

Для сокращения числа испытаний найдем границы корней многочлена  $f(x)$ . Замечаем, что все коэффициенты его положительны, а потому положительных корней он не имеет, т. е.  $\text{ВГ} = 0$ . Теперь найдем нижнюю границу  $\text{НГ} = \equiv -\left(1 + \frac{12}{4}\right) = -4$ . Таким образом, корни данного многочлена находятся в промежутке  $(-4; 0)$ , и, следовательно, осталось испытать числа

$$-1, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}. \quad (1)$$

Используем еще тот факт, что если дробь  $\frac{p}{q}$  является

корнем многочлена  $f(x)$ , то  $\frac{f(1)}{p-q}$  и  $\frac{f(-1)}{p+q}$  — целые числа.

Проверим это условие для чисел (1), учитывая, что  $f(1) = 36$ ,  $f(-1) = 6$ . Результаты запишем в таблицу.

$\frac{p}{q}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$
$\frac{f(1)}{p-q}$	ц	ц	д	д	д
$\frac{f(-1)}{p+q}$	ц	ц			

Итак, корнями многочлена  $f(x)$  могут быть лишь числа  $-3$  и  $-\frac{1}{2}$ . Проверим каждое из этих чисел по схеме Горнера.

	4	12	1	6	10	3
$-3$	4	0	1	3	1	0
$-\frac{1}{2}$	4	-2	2	2	0	
$-\frac{1}{2}$	4	-4	4	0		
$-\frac{1}{2}$	4	-6	$7 \neq 0$			

Таким образом, многочлен  $f(x)$  имеет рациональные корни  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}$  (корень  $-3$  является простым, ибо частное от деления  $f(x)$  на  $x + 3$  имеет свободный член 1, не делящийся на  $-3$ ), причем

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x + 3) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (4x^2 - 4x + 4) = \\
 &= (x + 3) (2x + 1)^2 (x^2 - x + 1).
 \end{aligned}$$

## Упражнения

1. Отыскать рациональные корни многочлена  $f(x)$ :

a)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ ;

b)  $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ ;

c)  $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ;

d)  $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ ;

e)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$ ;

f)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$ ;

g)  $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ ;

h)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ ;

i)  $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ .

### § 19. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ.

#### УНИЧТОЖЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

**Задача 1.** Доказать, что любое комплексное число является алгебраическим относительно поля действительных чисел.

**Решение.** Напомним, что число  $\alpha$  называется *алгебраическим относительно поля  $P$* , если это число является корнем некоторого многочлена  $f(x)$  (или, что все равно, уравнения  $f(x) = 0$ ) с коэффициентами из поля  $P$ . Следовательно, для решения задачи достаточно показать, что любое комплексное число есть корень многочлена с действительными коэффициентами.

Пусть

$$z = a + bi.$$

Мы знаем, что если многочлен  $f(x)$  с действительными коэффициентами имеет мнимый корень  $z = a + bi$ , то он обязан иметь и сопряженный числу  $z$  корень  $\bar{z} = a - bi$ . Значит,  $f(x)$  имеет по крайней мере два множителя:  $x - (a + bi)$  и  $x - (a - bi)$ . Но перемножив эти двучлены, мы получим многочлен второй степени:

$$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

коэффициенты которого действительны. Следовательно, число  $z = a + bi$  — алгебраическое относительно поля  $D$ .

**Задача 2.** Найти степень алгебраического числа  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$  относительно поля  $R$ .

Решение. Степенью алгебраического числа  $\alpha$  относительно поля  $R$  называют степень неприводимого над полем  $R$  многочлена, корнем которого является число  $\alpha$ . Значит, нам нужно найти неприводимый многочлен над полем  $R$ , корнем которого является число  $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Это можно сделать следующим образом. Возьмем уравнение

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Ясно, что число  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  является корнем этого уравнения. Возведя обе части этого уравнения во вторую степень, получим уравнение

$$x^2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Для окончательного освобождения от иррациональных коэффициентов перенесем в этом уравнении член 2 в левую часть и обе части полученного уравнения возведем в квадрат. Получим уравнение

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

с рациональными коэффициентами. При этом в результате сделанных преобразований потери корней не происходило. Следовательно, число  $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  является корнем полученного уравнения или многочлена  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ . Легко видеть также, что этот многочлен над полем рациональных чисел неприводим. Так как степень многочлена  $f(x)$  равна 4, то число  $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  является алгебраическим числом 4-й степени.

Задача 3. Каков общий вид чисел простого алгебраического расширения поля  $R$  (рациональных чисел) с помощью числа  $\sqrt{3}$ ?

Решение. По определению простое алгебраическое расширение поля  $R$  с помощью числа  $\sqrt{3}$  есть минимальное числовое поле, содержащее  $R$  и  $\sqrt{3}$ . Оно обозначается через  $R(\sqrt{3})$ . Таким образом, нам нужно написать общий вид чисел из поля  $R(\sqrt{3})$ . Так как  $R \subset R(\sqrt{3})$  и  $\sqrt{3} \in R(\sqrt{3})$  и поле замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления, то поле  $R(\sqrt{3})$

должно содержать все числа вида

$$\frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}}, \quad (1)$$

где  $a, b, c, d \in R$ .

Обозначим множество чисел вида (1) через  $R'$ . Покажем, что  $R'$  — поле. Всякое число вида  $\frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}}$  освобождением от иррациональности в знаменателе можно привести к виду  $a_1 + b_1\sqrt{3}$ , где  $a_1, b_1 \in R$ . Отсюда следует, что множество  $R'$  совпадает со множеством чисел вида  $a_1 + b_1\sqrt{3}$  с любыми рациональными числами  $a_1, b_1$ . Но, как было показано в задаче 21, § 11, последнее множество образует поле. Итак, имеем: множество  $R(\sqrt{3})$  содержит в себе множество чисел вида  $a + b\sqrt{3}$  ( $a, b \in R$ ), которое само является полем, содержащим  $R$  и  $\sqrt{3}$ . А так как  $R(\sqrt{3})$  — минимальное из таких полей, то оно должно совпадать с полем  $R'$  (чисел вида  $a_1 + b_1\sqrt{3}$ ). Таким образом, всякое число поля  $R(\sqrt{3})$  можно представить в виде

$$a + b\sqrt{3},$$

где  $a$  и  $b$  — рациональные числа. Эту задачу можно было бы решить несколько короче, воспользовавшись известной теоремой (об уничтожении иррациональности в знаменателе): если  $\alpha$  — алгебраическое число степени  $n$  над полем  $P$ , то всякое число  $t$  поля  $P(\alpha)$  можно записать в виде

$$t = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \quad (2)$$

с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  из  $P$ .

В нашем случае  $\alpha = \sqrt{3}$  есть алгебраическое число 2-й степени над  $R$  ( $\sqrt{3}$  есть корень неприводимого над полем  $R$  многочлена  $x^2 - 3$ ). Значит, всякое число из поля  $R(\sqrt{3})$  согласно формуле (2) имеет вид:

$$t = a_0 + a_1\sqrt{3}, \text{ где } a_0, a_1 \in R.$$

**Задача 4.** Написать общий вид чисел поля  $R(\sqrt[3]{2})$ .

**Решение.** Число  $\alpha = \sqrt[3]{2}$  является корнем неприводимого над полем  $R$  многочлена

$$x^3 - 2.$$

Следовательно,  $\sqrt[3]{2}$  является алгебраическим числом (над полем  $R$ ) степени 3 и всякое число поля  $R(\sqrt[3]{2})$  может быть представлено в виде

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4},$$

где  $a, b, c \in R$  [см. формулу (2)].

**Задача 5.** Построить поле  $R(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ .

**Решение.** Построить поле означает написать общий вид его чисел.  $R(\sqrt{2}; \sqrt{3})$  — это поле, полученное из поля  $R$  последовательным расширением с помощью чисел  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ . Иначе говоря, сначала поле  $R$  надо расширить с помощью  $\sqrt{2}$ , т. е. построить поле  $R_1 = R(\sqrt{2})$ , а затем поле  $R_1$  расширить с помощью  $\sqrt{3}$ , т. е. построить поле  $R_1(\sqrt{3}) = R(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ .

По формуле (2) всякое число  $t$  поля  $R_1(\sqrt{3})$  имеет вид:

$$t = a + b\sqrt{3}, \quad (3)$$

где числа  $a, b \in R_1$ . В свою очередь всякое число поля  $R_1 = R(\sqrt{2})$  можно представить в виде

$$c + d\sqrt{2}, \text{ где } c, d \in R.$$

Следовательно, числа  $a$  и  $b$  из (3) можно записать в виде  $a = a_1 + b_1\sqrt{2}$ ;  $b = a_2 + b_2\sqrt{2}$ . Подставляя в (3), получим:

$$\begin{aligned} t &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})\sqrt{3} = \\ &= (a_1 + a_2) + b_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + b_2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, поле  $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  есть множество чисел вида

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},$$

где  $a, b, c, d$  — любые рациональные числа.

**Задача 6.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$t = \frac{3 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1}.$$

**Решение.** В задачах 3, 4, 5 мы использовали теорему об освобождении от иррациональности в знаменателе

(см. задачу 3) для случая, когда поле  $P$  является полем рациональных чисел  $R$ , не задумываясь о самом алгоритме освобождения от иррациональности в знаменателе.

В простейших случаях (типа  $\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}$ ) это достигается умножением числителя и знаменателя на множитель, сопряженный знаменателю ( $c - d\sqrt{3}$ ). В общем же случае отыскание числа, сопряженного знаменателю (такого числа, которое при умножении на знаменатель дает рациональное число), затруднительно. В решении этого вопроса большую помощь оказывает упомянутая выше теорема, которая дает, хотя и громоздкий, но общий алгоритм для освобождения от алгебраической иррациональности в знаменателе.

Применим его к решению нашей задачи.

Замечаем, что число  $\sqrt[3]{2}$  есть корень неприводимого многочлена  $p(x) = x^3 - 2$  и знаменатель дроби  $t$  является значением многочлена  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  при  $x = \sqrt[3]{2}$ , т. е. знаменатель равен  $f(\sqrt[3]{2})$ , тогда как  $p(\sqrt[3]{2}) = 0$ . Очевидно, что многочлены  $f(x)$  и  $p(x)$  взаимно просты. Следовательно, для них можно подобрать такие многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$ , что  $f(x) \cdot M(x) + p(x) \cdot N(x) = d$ , где  $d$  — некоторое рациональное число. Для этого (см. задачу 5, § 13) к многочленам  $f(x)$  и  $p(x)$  нужно применить алгоритм Евклида.

Результаты делений можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x) q_1(x) + r_1(x), \\ f(x) &= r_1(x) q_2(x) + r_2(x), \end{aligned}$$

где  $q_1(x) = x - 2$ ;  $q_2(x) = \frac{1}{5}x + \frac{14}{25}$ ,  $r_1(x) = 5x - 4$ ,  $r_2(x) = \frac{31}{25}$ .

Из этих равенств выразим  $r_2(x)$  через  $p(x)$  и  $f(x)$ .

Так как

$$r_2(x) = f(x) - r_1(x) q_2(x) \text{ и } r_1(x) = p(x) - f(x) q_1(x),$$

то

$$\begin{aligned} r_2(x) &= f(x) - [p(x) - f(x) q_1(x)] q_2(x) = \\ &= f(x) [1 + q_1(x) q_2(x)] + p(x) [-q_2(x)]. \end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) [1 + q_1(x) q_2(x)] + p(x) [-q_2(x)] = \frac{31}{25}.$$

Подставив в это тождество вместо  $x$  число  $\sqrt[3]{2}$  и учитывая, что  $p(\sqrt[3]{2}) = 0$ , получим:

$$f(\sqrt[3]{2}) [1 + q_1(\sqrt[3]{2}) q_2(\sqrt[3]{2})] = \frac{31}{25}.$$

Следовательно, если мы умножим знаменатель дроби  $t$  на число  $M = 1 + q_1(\sqrt[3]{2}) q_2(\sqrt[3]{2})$ , то получим рациональное число  $\frac{31}{25}$ . Значит, нужно числитель и знаменатель умножить на число  $M = \frac{1}{25}(5\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2} - 3)$ . В итоге получим:  $t = \frac{1}{31}(19\sqrt[3]{4} + 9\sqrt[3]{2} + 1)$ .

**Задача 7.** Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$t = \frac{1}{a^2 + 2a - 1},$$

где  $\alpha$  есть корень многочлена  $p(x) = x^3 + 3x + 1$ .

**Решение.** Легко проверить, что многочлен  $x^3 + 3x + 1$  неприводим над полем  $R$ . В самом деле, многочлен 3-й степени тогда и только тогда приводим над полем  $R$ , когда он имеет хотя бы один рациональный корень. Многочлен  $p(x)$  рациональных корней не имеет (проверяем делители свободного члена). Значит, он неприводим. Знаменатель дроби  $t$  является значением многочлена  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  при  $x = \alpha$ . Так как  $p(x)$  неприводим, то многочлены  $p(x)$  и  $f(x)$  взаимно просты. Следовательно, существуют такие многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$ , что

$$f(x)M(x) + p(x)N(x) = d,$$

где  $d$  — рациональное число. Найдем многочлены  $M(x)$  и  $N(x)$ , применив алгоритм Евклида для многочленов  $p(x)$  и  $f(x)$ :

$$p(x) = f(x)q_1(x) + r_1(x), \quad q_1(x) = x - 2, \quad r_1(x) = 8x - 1,$$

$$f(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \quad q_2(x) = \frac{1}{8}x + \frac{17}{64}, \quad r_2(x) = -\frac{47}{64}.$$

Так как здесь, как и в предыдущей задаче, алгоритм Евклида состоит лишь из двух делений, то имеем:

$$f(x)[1 + q_1(x)q_2(x)] + p(x)[-q_2(x)] = -\frac{47}{64}.$$

Подставив в это равенство вместо  $x$  число  $\alpha$  и учитывая, что  $p(\alpha) = 0$ , получим:

$$f(\alpha) [1 + q_1(\alpha) q_2(\alpha)] = -\frac{47}{64}.$$

Значит, для освобождения от иррациональности в знаменателе достаточно члены дроби  $t$  умножить на число

$$1 + q_1(\alpha) q_2(\alpha) = 1 + (\alpha - 2) \left( \frac{1}{8} \alpha + \frac{17}{64} \right) = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{64} \alpha + \frac{15}{32}.$$

В итоге получим:

$$t = \frac{\frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{64} \alpha + \frac{15}{32}}{-\frac{47}{64}} = -\frac{8\alpha^2 + \alpha + 30}{47}.$$

Сделаем проверку полученного равенства:

$$\frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 1} = \frac{8\alpha^2 + \alpha + 30}{-47}.$$

Для этого находим произведение

$$(x^2 + 2x - 1)(8x^2 + x + 30) = 8x^4 + 17x^3 + 24x^2 + 59x - 30.$$

Многочлен  $\varphi(x) = 8x^4 + 17x^3 + 24x^2 + 59x - 30$  можно представить в виде  $p(x) \cdot (8x + 17) - 47$  [для этого нужно было поделить с остатком  $\varphi(x)$  на  $p(x)$ ]. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 8x^4 + 17x^3 + 24x^2 + 59x - 30 = \\ &= p(x)(8x + 17) - 47 = -47, \end{aligned}$$

ибо  $p(x) = 0$  [ $x$  — корень многочлена  $p(x)$ ].

Значит, задача решена правильно.

### Упражнения

1. Показать, что число  $\alpha$  является алгебраическим относительно поля  $R$ , и найти его степень  $n$ :

a)  $\alpha = i$ ; b)  $\alpha = \sqrt{5}$ ; c)  $\alpha = \sqrt[5]{2}$ ; d)  $\alpha = \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ ;

e)  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; f)  $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ; g)  $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$ .

2. Найти общий вид чисел из простого алгебраического



Найдем разность

$$f - \sigma_1^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - \\ - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - x_1x_2x_3.$$

Высший член полученного многочлена равен  $-3x_1^2x_2$ . Ему соответствует система показателей 2 1 0 ( $x_1^2x_2^1x_3^0$ ). Такой же высший член будет и у многочлена

$$-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^{0-0} = -3\sigma_1\sigma_2 = -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + \\ + x_2x_3) = -3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + \\ + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3).$$

Вычитая из  $f - \sigma_1^3$  многочлен  $-3\sigma_1\sigma_2$ , получим:

$$f - \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 = 8x_1x_2x_3 = 8\sigma_3.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3.$$

Эту задачу можно решить несколько проще, если предусмотреть произведения  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$ , которые приходится вычитать из многочлена  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Это можно сделать, если учесть следующие факты: а) произведение  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$  вполне определяется своим высшим членом: если его высший член равен  $x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ , то  $\alpha_1 = k_1 - k_2$ ,  $\alpha_2 = k_2 - k_3$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_n = k_n$ ; б) высший член вычитаемого из  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  произведения  $\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$  «не выше» высшего члена у  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; в) показатели при  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в высших членах образуют невозрастающую последовательность; г) если многочлен  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  однородный, то сумма показателей у всех его членов, а следовательно, и у всех вычитаемых из него членов постоянна. Исходя из этих фактов, укажем решение нашего примера. Результаты запишем в таблицу:

Возможные высшие члены многочленов 3-й степени от трех переменных	Соответствующие им системы показателей	Произведения основных симметрических многочленов, имеющих указанные высшие члены
$x_1^3 x_2^0 x_3^0$	3 0 0	$\sigma_1^3$
$A x_1^2 x_2^1 x_3^0$	2 1 0	$A\sigma_1\sigma_2$
$B x_1 x_2 x_3$	1 1 1	$B\sigma_3$

Итак, имеем тождество

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$$

с неопределенными коэффициентами  $A$  и  $B$ . Для нахождения  $A$  и  $B$  будем подставлять в это тождество различные числовые значения переменных  $x_1, x_2, x_3$ . При этом удобнее подставлять такие значения, для которых некоторые из многочленов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  равны нулю. Так, при  $x_1=1, x_2=1, x_3=0$  имеем:  $\sigma_1=2, \sigma_2=1, \sigma_3=0, f=2$ . Следовательно,

$$2 = 2^3 + A \cdot 2 \cdot 1 + B \cdot 0.$$

Отсюда  $A = -3$  и  $f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$ .

Положим теперь  $x_1=1, x_2=1, x_3=-2$ . Тогда  $f=-16, \sigma_1=0, \sigma_3=-2$ . Имеем, следовательно,  $-16 = B \cdot (-2)$ ; отсюда  $B=8$ .

Ответ.  $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$ .

**З а м е ч а н и е.** Если симметрический многочлен  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  неоднородный, то его предварительно следует представить в виде суммы симметрических однородных многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , а затем каждый из этих многочленов выразить через  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ .

**Задача 2.** Выразить многочлен

$$f = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$$

через основные симметрические многочлены.

**Решение.** Во-первых, замечаем, что  $f$  является однородным симметрическим многочленом степени 6. Высший член данного многочлена равен  $x_1^4 x_2^2$ . Ему соответствует система показателей 4 2 0. Теперь нетрудно написать системы показателей, соответствующие высшим членам многочленов, которые возможно придется вычитать из  $f$ . Это будут (имеем в виду, что степень всех членов равна 6):

$$420; 411; 330; 321; 222.$$

Следовательно,

$$f = \sigma_1^2 \sigma_2^2 + A\sigma_1^3 \sigma_3 + B\sigma_2^3 + C\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + D\sigma_3^2,$$

где  $A, B, C, D$  — пока неопределенные коэффициенты. Определим их, подставляя в последнее тождество вместо  $x_1, x_2, x_3$  некоторые числовые значения (см. таблицу):

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$f$
1	1	0	2	1	0	2
1	1	-2	0	-3	-2	50
-1	2	2	3	0	-4	200
1	1	1	3	3	1	8

Получим систему уравнений относительно неизвестных  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned} 2 &= 4 + B, \\ 50 &= -27B + 4D, \\ 200 &= -108A + 16D, \\ 8 &= 81 + 27A + 27B - 9C + D. \end{aligned}$$

Решив ее, найдем:  $B = -2, D = -1, A = -2, C = 4$ .  
Итак,

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_1^3 \sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3^2.$$

Задача 3. Найти сумму кубов корней уравнения

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Решение. Обозначим корни нашего уравнения через  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Нам требуется найти  $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ , не находя самих корней  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . По формулам Виета найдем значения основных симметрических многочленов от корней нашего уравнения:  $\sigma_1 = -2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -5, \sigma_4 = 3$ . Следовательно, для решения нашей задачи достаточно однородный симметрический многочлен  $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$  выразить через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Так же, как и в предыдущей задаче, найдем:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Подставляя сюда наши значения для  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , получим: сумма корней данного уравнения равна

$$(-2)^3 - 3(-2) \cdot 1 + 3(-5) = -17.$$

**Задача 4.** Разложить на множители многочлен

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

**Решение.** Выразим многочлен  $f(x, y, z)$  через основные симметрические многочлены от переменных  $x, y, z$ :

$$f(x, y, z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Вынося  $\sigma_1$  за скобки и подставляя вместо  $\sigma_1, \sigma_2$  их выражения через  $x, y, z$ , получим:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

**Задача 5.** Составить многочлен, имеющий своими корнями кубы корней многочлена  $f(x) = x^2 + px + q$ .

**Решение.** Обозначим корни многочлена  $f(x)$  через  $x_1, x_2$ . Тогда корнями искомого многочлена

$$\varphi(x) = x^2 + ax + b$$

будут числа  $x_1^3$  и  $x_2^3$ . По теореме Виета  $a = -(x_1^3 + x_2^3)$ ,  $b = x_1^3 x_2^3$ . Рассматривая выражения  $x_1^3 + x_2^3$  и  $x_1^3 x_2^3$  как многочлены от переменных  $x_1, x_2$ , представим их через основные симметрические многочлены:

$$x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2; \quad x_1^3 x_2^3 = \sigma_2^3.$$

Если теперь переменным  $x_1, x_2$  придать значения корней данного уравнения, то получим:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -p, \quad \sigma_2 = x_1 x_2 = q.$$

Отсюда имеем:

$$a = -(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = p^3 - 3pq, \quad b = q^3.$$

Итак,

$$\varphi(x) = x^2 + (p^3 - 3pq)x + q^3.$$

### Понятие результата и дискриминанта

**Задача 6.** Вычислить результат многочленов

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + x + 3.$$

Решение. Для вычисления результата  $R(f; g)$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  воспользуемся определителем Сильвестра:

$$R(f; g) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислив этот определитель, получим:  $R(f; g) = 243$ .

Задача 7. При каких значениях  $\lambda$  многочлены  $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$  и  $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$  имеют общий корень?

Решение. Для того чтобы многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  имели хотя бы один общий корень, необходимо и достаточно, чтобы их результат  $R(f; g)$  равнялся нулю. Поэтому для решения задачи надо найти результат многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  и приравнять его нулю. После этого останется решить полученное уравнение относительно неизвестного  $\lambda$ .

$$R(f; g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix}.$$

Проведя соответствующие вычисления, найдем:

$$R(f; g) = -4(\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Уравнение

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0$$

имеет корни:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} f(x; y) &= y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ g(x; y) &= y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0. \end{aligned}$$

Решение. Расположив многочлены  $f(x; y)$  и  $g(x; y)$  по убывающим степеням  $y$ , получим:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= y^2 - (7x + 2)y + (4x^2 + 13x - 3) = 0, \\ g(x; y) &= y^2 - (14x + 4)y + (9x^2 + 28x - 5) = 0. \end{aligned}$$

Найдем результат для  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  как для многочленов от переменного  $y$  ( $x$  можно считать параметром).

$$R(f; g) = \begin{vmatrix} 1 & -7x-2 & 4x^2+13x-3 & 0 \\ 0 & 1 & -7x-2 & 4x^2+13x-3 \\ 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 & 0 \\ 0 & 1 & -14x-4 & 9x^2+28x-5 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель, получим:

$$R(f; g) = -24x(x+2)(x^2-3x+2).$$

Уравнение  $-24x(x+2)(x^2-3x+2) = 0$  имеет корни:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

При этих значениях  $x$  результат для  $f(x; y)$  и  $g(x; y)$  как для многочленов от переменного  $y$  равен нулю, и, следовательно, уравнения  $f(x_i, y) = 0$  и  $g(x_i, y) = 0$  при любом  $i = 1, 2, 3, 4$  имеют общие корни. Найдем их для каждого  $i$ .

a)  $x_1 = 0.$

$$\begin{aligned} f(0; y) &= y^2 - 2y - 3 = 0, \\ g(0; y) &= y^2 - 4y - 5 = 0. \end{aligned}$$

Общим корнем последних двух уравнений является число

$$y_1 = -1.$$

b)  $x_2 = -2.$

$$\begin{aligned} f(-2; y) &= y^2 + 12y - 13 = 0, \\ g(-2; y) &= y^2 + 24y - 25 = 0; \\ y_2 &= 1. \end{aligned}$$

e)  $x_3 = 1.$

$$\begin{aligned} f(1; y) &= y^2 - 9y + 14 = 0, \\ g(1; y) &= y^2 - 18y + 32 = 0; \\ y_3 &= 2. \end{aligned}$$

d)  $x_4 = 2.$

$$\begin{aligned} f(2; y) &= y^2 - 16y + 39 = 0, \\ g(2; y) &= y^2 - 32y + 87 = 0; \\ y_4 &= 3. \end{aligned}$$

Итак, данная система уравнений имеет 4 решения:

$$(0; -1), \quad (-2; 1), \quad (1; 2), \quad (2; 3).$$

Задача 9. Вычислить дискриминант многочлена

$$f(x) = x^4 - x^3 - x + 1.$$

Решение. Дискриминант многочлена  $f(x)$  находится по формуле

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f; f'),$$

где  $a_0$  и  $n$  — соответственно старший коэффициент и степень многочлена  $f(x)$ ,  $R(f; f')$  — результат многочлена  $f(x)$  и его производной  $f'(x)$ . Вычислим сначала  $R(f; f')$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - x + 1, \\ f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 1. \end{aligned}$$

$$R(f; f') = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{ (Проверьте!)}$$

Но тогда и  $D(f) = 0$ . Итак, дискриминант данного многочлена равен нулю. Это означает, что многочлен  $f(x)$  имеет кратные корни.

Задача 10. При каких значениях  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x) = x^3 + px + q$  имеет кратные корни?

Решение. Многочлен  $f(x)$  имеет кратные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Поэтому найдем дискриминант данного многочлена. Учитывая, что  $f'(x) = 3x^2 + p$ , получим:

$$\begin{aligned} R(f; f') &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & -2p & -3q & 0 \\ 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^3. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$D(f) = (-1)^3 R(f; f') = -4p^3 - 27q^3.$$

Следовательно, многочлен  $x^3 + px + q$  имеет тогда и только тогда кратный корень, когда его коэффициенты  $p$  и  $q$  связаны соотношением

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

(Сравните с задачей 4, § 16.)

### Упражнения

1. Дополнить следующие функции до симметрических и выразить через основные симметрические многочлены:

a)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + \dots$  ;

b)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3 + \dots$  ;

c)  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 \dots$  ;

d)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2) \dots$  .

2. Представить многочлен через основные симметрические многочлены:

a)  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$ ;

b)  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_1^2 x_3^2$ ;

c)  $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ ;

d)  $(x_1 x_2 + x_3 x_4) (x_1 x_3 + x_2 x_4) (x_1 x_4 + x_2 x_3)$ .

3. Вычислить значение симметрической функции

$$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) (x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2) (x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2)$$

от корней уравнения

$$5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0.$$

4. Найти площадь и радиус круга, описанного около треугольника, стороны которого равны корням кубического уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

(Указание. Выразите площадь и радиус круга в виде симметрических функций от его сторон.)

5. Дан многочлен  $f(x) = x^3 + 2x - 1$ . Составить многочлен, корнями которого являются:

a) квадраты корней многочлена  $f(x)$ ;

b) кубы корней многочлена  $f(x)$ .

6. Вычислить результат многочленов:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ ,  $\varphi(x) = 2x^2 - x - 1$ ;

b)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$ ,  $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 - 3x + 4$ .

7. При каком значении  $\lambda$  многочлены  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют общий корень:

a)  $f(x) = x^3 - 2\lambda x + \lambda^3$ ,  $\varphi(x) = x^2 + \lambda^2 - 2$ ;

b)  $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 9$ ,  $\varphi(x) = x^3 + \lambda x - 3$ .

8. Решить систему уравнений:

a)  $y^2 + x^2 - y - 3x = 0$ ;

$$y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0.$$

b)  $5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0$ ;

$$y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0.$$

9. Вычислить дискриминант многочлена:

a)  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ ;

b)  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$ ;

c)  $f(x) = x^n + a$ .

10. При каком значении  $\lambda$  многочлен  $f(x)$  имеет кратные корни:

a)  $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ ;

b)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$ .

## ОТВЕТЫ

### § 1

1. а)  $-2$ ; б)  $26$ ; в)  $4ab$ ; д)  $a^2 + b^2$ ; е)  $1$ ; ф)  $\sin(\alpha - \beta)$ ; г)  $b - a$ . 2. а)  $x = 3$ ,  $y = -1$ ; б)  $x = 2$ ,  $y = -3$ ; в)  $x = 2$ ,  $y = 0$ , если хотя бы одно из чисел  $a$ ,  $b$  отлично от нуля. 6. а)  $x = \pm \sqrt{2}$ ; б)  $x = 0$ ,  $y = 0$ . 7. а)  $S = 0$  (точки  $A_1, A_2, A_3$  лежат на одной прямой); б)  $S = 15$ . 8. а)  $40$ ; б)  $-21$ ; в)  $0$ ; д)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ; е)  $(b - a)(c - a)(c - b)$ . 10. а)  $S = 4$ ; б)  $S = \pm (p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp)$ . 11. а)  $x = -1$ ,  $y = 2$ ,  $z = -3$ ; б)  $x = 3$ ,  $y = -1$ ,  $z = 2$ ; в)  $x = -a$ ,  $y = -b$ ,  $z = c$ . 12. а)  $x_1 = 1$ ,  $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б) если  $ab + bc + ca \neq 0$ , то  $x = 0$ ; если  $ab + bc + ca = 0$ , то  $x$  — любое число

### § 2

1. а)  $18$ ; б)  $n(2n - 1)$ . 2. а) Четная; б) четная; в) четная при  $n = 4k$  или  $4k + 1$ ; нечетная при  $n = 4k + 2$  и  $n = 4k + 3$ ; д) четная.

### § 3

1. Со знаком  $+$ . 2.  $l = 2$ ,  $k = 6$ . 3.  $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ ,  $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ ,  $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ . 4. Произведение  $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$  входит со знаком  $+$ ; произведение  $a_{1n}a_{2n-1} \dots a_{n1}$  входит со знаком  $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . 5.  $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_{1n} \times \dots \times a_{2,n-1} \dots a_{n1}$ . 8.  $10x^4$  и  $-5x^3$ . 11. Один определитель получается из другого умножением на  $(-1)^{n-1}$ . 14.  $35$ .

### § 4

1. а)  $-a_2 \begin{vmatrix} b_1 b_3 \\ c_1 c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ c_1 c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ b_1 b_3 \end{vmatrix}$ ; б)  $8a + 15b + 12c - 19d$ ; в)  $2a - 8b + c + 5d$ . 2. а)  $-3$ ; б)  $18$ ; в)  $-9$ ; д)  $18$ . 3. а)  $-66$ ; б)  $52$ ; в)  $89$ . 4. а)  $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d$ ; б)  $-4[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2(xy + xz + xu + yz + yu + zu)]$ .

## § 5

1. a)  $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ; б)  $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23}) \dots (x_n - a_{n-1, n})$ ;  
 $\frac{n(n+1)}{2}$   
 c)  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$  2. 1. 3. a)  $n + 1$ ;  
 б)  $\frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$ ; c)  $-a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ ; d) произведение всевозможных разностей вида  $a_i - a_j$ , где  $i > j$ . 4. а)  $x^n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1}$ ; б)  $(a_1 - x_1)(a_2 - x_2) \dots (a_n - x_n) - a_1 a_2 \dots a_n$ . 5. 2 при  $n = 2$  и 0 при  $n > 2$ .

## § 6

1. а)  $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -\frac{3}{2}, x_4 = \frac{1}{2}$ ; б)  $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{2}{3}$ ; c)  $x=1, y=0, z=3, t=0$ ; d)  $x=1, y=1, z=-1, t=-1$ . 3. а)  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ ; б)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{c}{a + b(n-1)}$ . 4.  $a = b$  или  $a = -2b$ . 5. Да.

6.  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ . 7. а)  $\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ;

б)  $\begin{vmatrix} y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ y_4 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

## § 7

1. а) 3; б) 3; c) 2; d) 2; e) 4; f) 5; g) 3; h) 6; i) 4; k) 3; l) 3; m) 3.  
 2. а) При  $a=3$  ранг равен двум, в остальных случаях — трем;  
 б) при  $a=2$  ранг равен трем, в остальных случаях — четырем;  
 c) ранг равен четырем независимо от значения  $a$ . 7. а) 2; б) 2;  
 c) 2; d) 2; e) 2; f) 2; g) 3; h) 4; i) 3. 8. а) Ранг равен двум при  $a=0$  и трем при  $a \neq 0$ ; б) ранг равен единице при  $a=1$  и трем при  $a \neq 1$ ; c) ранг равен единице при  $a=1$ , трем при  $a=-3$  и четырем при  $a \neq 1, a \neq -3$ ; d) ранг равен двум при  $a=0$  и трем при  $a \neq 0$ . 9. а) Ранг равен двум при  $a=1, b=\frac{1}{2}$  и трем в остальных случаях; б) ранг равен единице при  $a=1, b=c=d$  и трем в остальных случаях; c) ранг равен двум при  $a=1, b=3$  и трем в остальных случаях.

§ 8

1. а)  $x_3 = 2x_2 - x_1$ ,  $x_4 = 1$ ; б)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$ ; в)  $x_1 = 8x_3 - 7x_4$ ,  $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ ; г) система несовместна; д) система несовместна; е)  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,  $x_4 = x_5$ ; ж)  $x_1 = \frac{-4x_4 + 7x_5}{8}$ ,  $x_2 = \frac{-4x_4 + 5x_5}{8}$ ,  $x_3 = \frac{4x_4 - 5x_5}{8}$ ; з)  $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$ ,  $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$ ; и)  $x_1 = \frac{1 + 5x_4}{6}$ ;  $x_2 = \frac{1 - 7x_4}{6}$ ,  $x_3 = \frac{1 + 5x_4}{6}$ ; к)  $x_1 = \frac{1}{2}x_4 + \frac{31}{6}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{7}{6}$ . 2. а) При  $(a-1)(a+2) \neq 0$ —единственное решение:  $x = y = z = \frac{1}{a+2}$ ; при  $a=1$  общее решение имеет вид:  $x = 1 - y - z$ ; при  $a = -2$  система несовместна; б) при  $(a-1)(a+2) \neq 0$ —единственное решение:  $x = -\frac{a+1}{a+2}$ ,  $y = \frac{1}{a+2}$ ,  $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$ ; при  $a = 1$  общее решение имеет вид:  $x = 1 - y - z$ ; при  $a = -2$  система несовместна; в) при  $(a-1)(a+3) \neq 0$ —единственное решение:  $x = y = z = u = \frac{1}{a+3}$ ; при  $a = 1$  общее решение имеет вид:  $x = 1 - y - z - u$ ; при  $a = -3$  система несовместна; г) при  $a = 0$  или  $a = 1$  система несовместна; в остальных случаях—единственное решение; д) при  $b(a-1)(a+2) \neq 0$ —единственное решение; при  $a = -2$ ,  $b = -2$ , а также при  $a = 1$ ,  $b = 1$ —бесчисленное множество решений; во всех остальных случаях система несовместна; е) если числа  $a, b, c$  все различны—единственное решение; если  $a = b \neq c$ ,  $d = a$  или  $d = c$ —бесчисленное множество решений (одно неизвестное—свободное); то же самое в случае  $a \neq b = c$ ,  $d = a$  или  $d = c$ , а также в случае  $a = c \neq b$ ,  $d = c$  или  $d = b$ ; во всех остальных случаях система несовместна. 3.  $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$ . 4.  $y = x^3 - 1$ . 5.  $y = x^4 - 3x^3 - 5x + 5$ . 6.  $y^2 - y = 0$ . 7. а) Система совместна при  $\lambda(\lambda+3) \neq 0$  и несовместна при  $\lambda \neq 0$ ; б) система совместна при  $\lambda \neq -3$  и несовместна при  $\lambda = -3$ . 8. а) Система совместна при  $\lambda \neq -3$  и несовместна при  $\lambda = -3$ . 9. а)  $x_1 = -5t$ ,  $x_2 = 20t$ ,  $x_3 = -5t$ ,  $x_4 = -15t$ , где  $t$ —любое число; б)  $x_1 = -3t$ ,  $x_2 = (1-a)t$ ,  $x_3 = 3at$ ,  $x_4 = (1-a)t$ , где  $t$ —любое число.

§ 9

1. (1; 0; -1; 1). 2.  $\left(0; 1; 2; -\frac{17}{4}\right)$ . 3. (1; 2; 3; 4).

4. а)  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 = 0$ , где  $x_1 = \frac{-4x_4 + 7x_5}{8}$ ;

$$x_2 = \frac{-4x_4 + 5x_5}{8}; x_3 = \frac{4x_4 - 5x_5}{8}, x_4, x_5 \text{—любые; б) } a_1 \text{ есть линей-$$

ная комбинация  $a_4, a_5$ . 5. а)  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 0$ , где  $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ , причем  $x_2, x_3$  не равны нулю одновременно; б) нет;  $a_1 = a_3 - a_2$ . 6. а) Таких систем четыре: 1)  $a_1, a_3$ ; 2)  $a_1, a_4$ ; 3)  $a_2, a_3$ ; 4)  $a_2, a_4$ ; б) любая тройка векторов, кроме  $a_1, a_2, a_5$  и  $a_3, a_4, a_5$ . 7. а)  $\lambda$ —любое число; б)  $\lambda$ —любое число. 10. Пример линейно независимой системы векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1; 0; 0; \dots; 0), \\ a_2 &= (0; 1; 0; \dots; 0), \\ a_3 &= (0; 0; 1; \dots; 0), \\ &\vdots \\ a_n &= (0; 0; 0; \dots; 1). \end{aligned}$$

Система  $n$ -мерных векторов, состоящая более чем из  $n$  векторов, линейно зависима.

11. а) Общее решение:  $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2, x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$ .

Фундаментальная система решений:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	1	5	-7

б) Общее решение:  $x_4 = -\frac{9x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}; x_5 = \frac{3x_1 + 2x_2 + 4x_3}{4}$ .

Фундаментальная система решений:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	0	0	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	-2	1

с) Система имеет только нулевое решение. Фундаментальной системы решений не существует.

$$1. \text{ a) } \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -14 & -16 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \text{ f) } \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ a) } \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при четном } n \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ при нечетном } n; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при четном } n \text{ и } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ при нечетном } n; \text{ d) } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ a) } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ где } a \text{ и } b \text{—любые числа; b) } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \text{—любые числа.}$$

4. а) Произойдет перестановка 2-й и 3-й строк; б) строки расположатся в обратном порядке; в) ко второй строке прибавится третья, умноженная на  $\alpha$ ; г) вторая строка умножится на  $\alpha$ .

$$5. \text{ a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = ad - bc; \text{ b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \text{ d) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ d) } A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{vmatrix};$$

$$\text{e) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \text{ a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ a) } X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ b) } X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \text{ c) } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}; \text{ e) } X = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{20}{3} & -\frac{25}{3} \\ 5 & 4 & 4 \\ -3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \text{ g) } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \text{ h) } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{i) } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{3} & -30 & -\frac{193}{3} \\ \frac{5}{3} & -9 & -\frac{58}{3} \end{pmatrix}; \text{ k) } X = \begin{pmatrix} -16 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & -5 \\ -19 & -3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{l) } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \text{ a) } X = \begin{pmatrix} \frac{2+3a}{2} & \frac{3+3b}{2} \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ где } a, b \text{—любые числа};$$

$$\text{b) } X = \begin{pmatrix} a & \frac{2-3a}{4} \\ b & \frac{9-3b}{4} \end{pmatrix}, \text{ где } a, b \text{—любые числа}; \text{ c) } X \text{ не существует};$$

$$\text{d) } X \text{ не существует}; \text{ e) } X = \begin{pmatrix} 2-2a & -2b & 1-2c \\ a-1 & b+1 & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \text{—}$$

$$\text{любые числа}; \text{ f) } X = \begin{pmatrix} 7-3a & 5-3b & 7-3c \\ a & b & c \\ 5a-9 & 5b-3 & 5c-7 \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \text{—любые}$$

числа.

$$11. \text{ a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \text{ b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -3 & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix};$$

$$c) A^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ 23 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & & & 2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$f) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

15.  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

16. 0, если  $n > 2$ ;  $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\beta_1 - \beta_2)$ , если  $n = 2$ .

### § 11

1. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; е) да; ф) да; г) нет; h) нет. и) да. 8. а) Кольцо; б) поле; в) поле; г) поле; е) кольцо; ф) не является кольцом. 9. а) Кольцо; б) поле; в) кольцо; г) кольцо; е) кольцо; ф) поле. 10. Кольцо (не поле).

### § 12

1. а)  $2 + i$ ; б)  $\frac{127 + i\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\frac{44 - 5i}{318}$ ; г)  $2i^{n-1}$ . 2. а)  $x =$

$-\frac{4}{11}$ ;  $y = \frac{5}{11}$ ; б)  $x_1 = 1, y_1 = 3; x_2 = -1, y_2 = -3$ ; в)  $x = 4,$

$y = 2$ . 3. а) 1; б) 2; в)  $6(1 + i)$ . 4. а)  $\pm(3 + i)$ ; б)  $\pm(2 - i)$ ;

в)  $\pm \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{66})$ . 5. а)  $-2 + i, -3 + i$ ; б)  $2i, -1$ ; в)  $1 -$

$-i; \frac{4 - 2i}{5}$ . 8. Множество  $D$ . 9. Сопряжены. 10. 0, 1,  $-1, i, -i$ .

13.  $z_1 = 0$ , или  $z_2 = 0$ , или  $\text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2$ . 14. а)  $3(\cos 0 + i \sin 0)$ ,

b)  $\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$ ; c)  $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ ; d)  $\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi$ ;

e)  $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$ ; h)  $2\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right)$ . 15. а) Зам-

кнутый круг радиуса 3 с центром в начале координат; б) множество точек, находящихся вне круга радиуса 2 с центром в начале координат; в) открытый круг радиуса 1 с центром в точке  $3i$ ; г) луч, исходящий из начала координат под углом  $310^\circ$  к положительному направлению оси  $Ox$ ; д) эллипс с фокусами в точках  $3$  и  $2i$ . к) гипербола с фокусами в точках  $4$  и  $2i$ . 16. б)  $z_2 = 0$  или  $\text{Arg } z_2 = -\text{Arg } z_1$ . 18. а)  $\psi = \pi k$ ; б)  $\varphi = \pi k$ .

19. а)  $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{12}\pi + \varphi\right) + i \sin\left(\frac{5}{12}\pi + \varphi\right)\right]$ ;

б)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right]$ ; в)  $2^{12}(1+i)$ ;

д)  $2^9(1-i\sqrt{3})$ ; е)  $-2^6$ . 20. а)  $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ;

в)  $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$ ; д)  $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2}x$ . 21. а)  $-i$ ,

$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ,  $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ ; б)  $-1+i$ ,  $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ,

$\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ ; в)  $\pm 1 \pm i$ ; д)  $1, -1, \pm \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

е)  $\pm i\sqrt{3}$ ,  $\frac{\pm 3 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ; ф)  $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos \frac{24k+5}{72}\pi +\right.$

$\left.+ i \sin \frac{24k+5}{72}\pi\right)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, 7$ ; г)  $\sqrt[8]{32}\left(\cos \frac{24k+11}{48}\pi +\right.$

$\left.+ i \sin \frac{24k+11}{48}\pi\right)$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ . 22. а)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

б) см. упр. 21, д; в)  $\cos \frac{2k+1}{5}\pi + i \sin \frac{2k+1}{5}\pi$ ,  $k=0, 1, 2, 3, 4$ ;

д)  $\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi k}{6}\right)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, 11$ ; е)  $\sqrt{2}\left(\cos \frac{12k+5}{24}\pi +\right.$

$\left.+ i \sin \frac{12k+5}{24}\pi\right)$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ .

### § 13

1. а)  $2x^3 - 3x^2 + 9x - 24$ ; б)  $x^2 + 3x + 1$ ; в)  $x^2 + ix + 2$ .

2. а)  $x + 1$ ; б)  $x^3 + 1$ ; в)  $x^2 + x + 1$ ; д)  $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$ .

3. а)  $M(x) = -1$ ,  $N(x) = x + 1$ ,  $d(x) = x^3 + 1$ ; б)  $M(x) = -\frac{x-1}{3}$ ,  $N(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{3}$ ,  $d(x) = x - 1$ ; в)  $M(x) = -x - 1$ ,

$$N(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2, d(x) = 1; \text{ d) } M(x) = \frac{-x^2 + 3}{2}, N(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 2}{2}, d(x) = 1. \text{ 4. a) } q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 26, r = 38;$$

$$\text{b) } q(x) = x^3 + x^2 - 4x, r = 1; \text{ c) } q(x) = 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 81x + 243, r = 729; \text{ d) } q(x) = x^3 + ix^2 - ix - 4, r = 7 + 5i. \text{ 5. a) } f(x) = (x - 2)^4 + 10(x - 2)^3 + 29(x - 2)^2 + 31(x - 2) + 9. f(2) = 9; f'(2) = 31; f''(2) = 58; f'''(2) = 60; f^{IV}(2) = 24. \text{ 6. } f(2,95) = 11,33913125; f(3,2) = 15,4976; f(4,99) = 174,06818501; f(5,02) = 179,912920.$$

$$\text{7. a) } \frac{1}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^2} + \frac{29}{(x+3)^3} - \frac{36}{(x+3)^4}. \text{ 8. a) } x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 32x + 13; \text{ c) } x^4 + (4+5i)x^3 + (-4+15i)x^2 + (-16+8i)x - 12 - 2i.$$

### § 14

1. a) 2 — корень, -2 — не корень; b) не корень; c) корень; d) не корень. 2. a)  $k=3$ ; b)  $k=4$ ; c)  $k=2$ ; d)  $k=3$ ; e)  $k=2$ ; f) для  $a=-1$   $k=-3$ , для  $a=3$   $k=1$ . 4. a)  $A=-5$ ; b)  $A=3$ ,  $B=-4$ ; c)  $A=n$ ,  $B=-(n+1)$ . 5. a)  $1-i$ ,  $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$ ;

b)  $i$ ,  $-i$ ,  $-i$ ,  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $1+2i$ ,  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$ . 7. a)  $x^4 - (2+i)x^3 - (1-2i)x^2 + (2+2i)x - 2i$ ; b)  $x^4 - (6-i)x^3 + (12-6i)x^2 - (8-12i)x - 8i$ ; c)  $x^6 - (9+i)x^5 + (32+8i)x^4 - (46+12i)x^3 + (21-2i)x^2 + (7+13i)x - (6+6i)$ ; d)  $x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$ ; e)  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ . 9. 1)  $a=b=c=0$ ; 2)  $a=1$ ,  $b=-2$ ,  $c=0$ ; 3)  $a=1$ ,  $b=c=-1$ ; 4)  $b=\lambda$ ,  $a=-\frac{1}{\lambda}$ ,  $c=\frac{2-\lambda^2}{\lambda}$ , где  $\lambda^3 - 2\lambda + 2 = 0$ . 10.  $\lambda = -3$ . 11.  $\lambda = 8$ ;

$x_1 = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ . 12.  $-a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3$ .

13. a)  $x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ ; b)  $x^6 - 4x^5 + 12x^4 + 12x^2 - 8x + 4$ ; c)  $x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ ; d)  $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$ ; e)  $x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 65x^3 + 74x^2 - 46x + 12$ ; f)  $x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1131x^2 - 2028x + 2197$ ; g)  $x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$ .

### § 15

1. a) Над полем  $K$ :  $f(x) = (x+1-a-bi)(x+1-a+bi)(x+1+a+bi)(x+1+a-bi)$ , где  $a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ; над полем  $D$ :  $f(x) = [x^2 + 2x + 1 + \sqrt{2} - 2(x+1)] \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \cdot [x^2 + 2x + 1 + \sqrt{2} + 2(x+1)] \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ;

над полем  $R: f(x)$  — неприводим; б) над полями  $K, D$  и  $R: f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ; е)  $f(x) = (x+1)^2(x-2)(x+3)$ . 2. а)  $(x-1)^2(x+2)$ ; б)  $(x+1)^2(x^2+1)$ ; в)  $(x-1)^3$ . 3. а)  $(x-1)^2(x+1)$ ; б)  $(x-1)^3(x+1)$ ; в)  $x^d - 1$ , где  $d = (m, n)$ . 5. а)  $(x+1)^4(x-2)^2$ ; б)  $(x+1)^4(x-4)$ ; в)  $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$ ; д)  $(x-2)(x^2-2x+2)^2$ ; е)  $(x^2+1)^2(x-1)^3$ ; ф)  $(x^3-x^2-x-2)^2$ .

### § 16

1. а) 7,  $1 \pm i\sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ ,  $\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} \pm \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$ ; в)  $-1-i, -1-i, 2+2i$ ; д) 2, 2,  $-i$ .  
2. а) один; б) три; в) три. 3. а)  $\pm i, 1 \pm i\sqrt{2}$ ; б)  $\pm\sqrt{5}, \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ ;  
в) 1; 3;  $1 \pm \sqrt{2}$ . 5. а)  $\pm 2i$ ; б)  $-3\sqrt[3]{9}$ ; в) 0;  $-\frac{27}{4}$ .

### § 17

1. Ответы приводятся лишь для второго способа. а)  $(-5; 3)$ ; б)  $(0; 2)$ ; в)  $(-3, 1; 3)$ ; д)  $(-2, 6; 2, 6)$ ; е)  $(-31; 24)$ ; ф)  $(-9; 4, 2)$ ; г)  $(-3; 2, 5)$ . 2. Корни находятся в промежутках: а) вещественных корней нет; б)  $(-1; 0), (1; 2)$ ; в)  $(-1; 0), (0; 1)$ ; д)  $(-2; -1), (-1; 0), (0; 1), (4; 5)$ ; е)  $(0; 1), (1; 2)$ ; ф)  $(0; 1), (1; 2)$ ; г)  $x_1 = 2; 1 < x_2 < 2$ ; г)  $(-4; -3), (-1; -\frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}), (0; 1)$ ;  
и)  $(-2; -1), (-1; 0), (1; \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}; 2)$ ; к)  $(-2; -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}; -1), (0; \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}; 1), (1; 2)$ . 3. а) 3,388; б)  $-0,732$ ; в) 0,618; д) 0,268; е)  $-3,162$ ; ф) 1,236; г)  $-2,303$ ; г) 3,646; и) 1,618.  
4. а) 1,095;  $-0,262$ ;  $-1,477$ ;  $-2,356$ ; б) 0,827; 0,338;  $-1,209$ ;  $-2,956$ ; в) 1,469; 0,117; д) 8,006; 1,285; 0,196;  $-1,488$ ; е) 1,536;  $-0,154$ ; ф) 3,322; 1,095;  $-0,600$ ;  $-1,827$ .

### § 18

1. а)  $-3$ ; б)  $-3; \frac{1}{2}$ ; в) 1;  $-2; 3$ ; д) рациональных корней нет; е)  $-1; -2; -3; 4$ ; ф)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$ ; г) 1; 1;  $-3$ ;  $-3$ ; и) 3;  $-1; -1; -1; -1$ .

### § 19

1. а)  $n = 2$ ; б)  $n = 2$ ; в)  $n = 5$ ; д)  $n = 6$ ; е)  $n = 4$ ; ф)  $n = 6$ ; г)  $n = 12$ . 2. а)  $a + bi$ ; б)  $a + b\sqrt{5}$ ; в)  $a + b\sqrt[5]{2} + c\sqrt[5]{4} +$

$+d\sqrt[5]{8} + e\sqrt[5]{16}$ ; d)  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ ; e)  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{9} + e\sqrt[6]{24} + f\sqrt[9]{72}$ . (Здесь  $a, b, c, d, e, f$  — произвольные рациональные числа.) 3. а)  $\frac{3\sqrt[4]{8} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} - 5}{3}$ ;
   
 б)  $-11\sqrt[4]{7^3} + 18\sqrt{7} - 29\sqrt[4]{7} + 48$ ; с)  $\frac{-6\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 39}{47}$ ;
   
 д)  $\frac{-\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} - 3}{23}$ ; е)  $1 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}$ ;
   
 ф)  $\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .

## § 20

1. а)  $f = x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2$ ; б)  $f = \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3$ ; с)  $f = (x_1 + x_2)^2(x_1 + x_3)^2(x_2 + x_3)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2$ ; д)  $f = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$ . 2. а)  $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ ; б)  $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$ ; с)  $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$ ; д)  $\sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_2^2 - 4\sigma_2\sigma_4$ .

3.  $-\frac{1679}{625}$ . 4.  $S = \frac{1}{4}\sqrt{a(4ab - a^3 - 8c)}$ ;  $R = \frac{c}{\sqrt{a(4ab - a^3 - bc)}}$ .

5. а)  $x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ ; б)  $x^3 - 3x^2 + 11x - 1$ . 6. а)  $-7$ ; б)  $0$ .

7. а)  $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{-2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$ ;  $\lambda_{4,5} = \frac{-2 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2} + 2}}{2}$ ; б)  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ ;  $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{12}$ .

8. а)  $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 2,$   
 $y_1 = 1; y_2 = 0; y_3 = 2; y_4 = -1;$   
 б)  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 2,$   
 $y_1 = -1; y_2 = -1; y_3 = 1; y_4 = 2.$  9. а)  $49$ ; б)  $725$ ;

с)  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$ . 10. а)  $\lambda = \pm 2$ ; б)  $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ ;

$\lambda_{3,4} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2} i \sqrt{3}$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие . . . . .	3
§	1. Определители второго и третьего порядков . . . . .	5
§	2. Перестановки и подстановки . . . . .	7
§	3. Определение и свойства определителя $n$ -го порядка . .	9
§	4. Вычисление определителей с числовыми элементами . .	15
§	5. Вычисление определителей $n$ -го порядка . . . . .	19
§	6. Правило Крамера . . . . .	24
§	7. Ранг матрицы . . . . .	30
§	8. Системы линейных уравнений . . . . .	40
§	9. $n$ -мерные векторы . . . . .	56
§	10. Действия над квадратными матрицами . . . . .	64
§	11. Группы, кольца, поля . . . . .	76
§	12. Комплексные числа . . . . .	106
§	13. Деление многочленов с остатком. Схема Горнера. Ал- горитм Евклида . . . . .	127
§	14. Корни многочлена. Связь корней многочлена с его коэф- фициентами . . . . .	140
§	15. Разложение многочленов на неприводимые множители. Отделение кратных множителей . . . . .	150
§	16. Решение уравнений 3-й и 4-й степеней . . . . .	156
§	17. Приближенное вычисление действительных корней мно- гочлена . . . . .	162
§	18. Отыскание рациональных корней многочлена . . . . .	174
§	19. Алгебраическое расширение поля. Уничтожение ирраци- ональности в знаменателе дроби . . . . .	179
§	20. Многочлены от нескольких переменных . . . . .	186
	Ответы . . . . .	196

*Михаил Михайлович Глухов  
и Александр Самуилович Солодовников*

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ  
АЛГЕБРЫ**

Редактор *В. С. Капустина.*  
Технический редактор *В. Ф. Егорова.*  
Корректор *А. И. Киселева*

Сдано в набор 18/XII-1964 г. Подписано к печати 18/V-1965 г.  
84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub> Печ. л. 6,5 (10,92) Уч.-изд. л. 10,22.  
Тираж 30 000 экз. Заказ № 201.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета  
Совета Министров РСФСР по печати, Москва, 3-й проезд  
Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглаволиграф-  
прома Государственного комитета Совета Министров РСФСР  
по печати, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 31 коп.